

修士論文 2013年度（平成25年度）

量子中継器を用いた
量子ネットワークコーディングの挙動解析

慶應義塾大学大学院 政策・メディア研究科

氏名：石崎 佳織

量子中継器を用いた 量子ネットワークコーディングの挙動解析

本論文では、性能に制約を持つ量子中継器と特定のノイズ発生系の量子通信路から成るバタフライネットワークにおいて、量子中継器ネットワークコーディングの有用性を理論的解析から求めた。

近年、微細加工技術の進展に伴い、次世代の計算機である量子力学を利用して計算を行う量子コンピュータの提案・研究が進められてきている。また、量子情報の通信を行う量子ネットワークの研究も同様に進み始めている。その中でも、将来の大規模かつ遠距離間ネットワークの実装方式の有力候補として量子中継器ネットワークが注目されている。

特に本論文では、ネットワークコーディングというスループット向上等を目的に用いられる既存のネットワーク技術を、量子通信に拡張した量子ネットワークコーディングについて論じる。量子ネットワークコーディングは理想状態において有用性があることが確認されているが、ノイズや資源不足が与える影響については未知であった。

本論文によって、量子ネットワークコーディングによって2組の Bell-pair を得るための Fidelity は量子ネットワークコーディングを使用しない手法と比べてわずかに小さくなることが明らかになった。ただし、量子ネットワークコーディングはプロトコルを1回実行するだけで2組の Bell-pair を得られることから、スループットによる影響を深く懸念している際に有用であることが分かった。また実用的な量子ネットワークコーディング実行のための初期 Fidelity について下限の値 $F = 0.90$ を初めて求めた。

キーワード

1. 量子情報, 2. 量子通信, 3. 量子中継器, 4. ネットワークコーディング

慶應義塾大学大学院 政策・メディア研究科

石崎 佳織

Analysis of Quantum Network Coding for Realistic Repeater Networks

With the development of nano technology, researchers are studying quantum computers, which are the next generation of computers, based on quantum mechanics. Quantum networks which enable communication of quantum information are also being developed. In particular, quantum repeater networks have attracted attention for the implementation of long-distance and large-scale networks in the future.

Recently, researchers have extended network coding, which is a technique for enhancement throughput, into quantum computation and information. The utility of quantum network coding (QNC) has been shown under ideal conditions, but it has not been studied under conditions of noise and shortage of quantum resources.

In this thesis, we analyzed QNC, which can create end-to-end Bell-pairs at twice the rate of the standard quantum network repeater approach, on a butterfly network.

The joint fidelity of creating two Bell-pairs has a small penalty for QNC. It will thus be useful when we care more about throughput than fidelity. We found that the output fidelity drops below 0.5 when the initial Bell-pairs have fidelity $F < 0.90$.

Keywords :

1 . Quantum Information, 2. Quantum Network, 3.Quantum Repeater, 4 . Network Coding

Keio University, graduate school of Media and Governance

Kaori Ishizaki

目次

第1章	はじめに	1
1.1	序論	1
1.2	本研究の成果	3
1.3	本論文の構成	3
第2章	量子情報科学	4
2.1	量子ビット	4
2.2	状態ベクトル	4
2.3	量子ゲート	6
2.4	密度行列	7
2.4.1	純粋状態と混合状態	7
2.4.2	Fidelity	8
2.5	エンタングルメント	9
2.5.1	GHZ	9
2.6	量子回路	10
2.7	量子ネットワーク	10
2.8	量子中継器ネットワーク	11
2.8.1	エンタングルメントスワッピング	11
2.8.2	量子テレポーテーション	12
2.8.3	Bell 測定	13
第3章	ネットワークコーディング	15
3.1	古典ネットワークコーディング	15
3.2	量子ネットワークコーディング	17
3.2.1	量子ネットワークコーディングの目的	17
3.2.2	古典ネットワークコーディングとの対応	18
3.2.3	量子ネットワークコーディングの歴史	18
3.2.4	量子中継器ネットワークコーディング	18

第4章	QNCにおけるZ-errorの理論的解析	22
4.1	エラーモデルの定義	22
4.2	Connection	24
4.3	Add	26
4.4	Fanout	31
4.5	Removal / RemovalAdd	33
4.6	Result	34
4.6.1	古典相関関係	35
第5章	QNCにおけるX-errorの理論的解析	38
5.1	エラーモデルの定義	38
5.2	Connection	39
5.3	Result	40
第6章	結論	44
6.1	成果	44
6.2	課題と展望	45
	謝辞	46
	付録A 付録	50

目次

2.1	ブロッホ球	5
2.2	量子回路の例 (CNOT ゲート)	10
2.3	エンタングルメントスワッピングの概略図	12
2.4	量子中継器ネットワークプロトコルの概略図	14
3.1	バタフライネットワークにおける古典ネットワークコーディング	16
3.2	グレイルネットワークにおける古典ネットワークコーディング	17
3.3	量子中継器ネットワークコーディング初期配置および Result の概念図	21
4.1	量子ネットワークコーディング初期配置	23
4.2	エンタングルメントスワッピングを用いた同時通信の解決法概念図	23
4.3	量子ネットワークコーディングを用いた同時通信の解決法概念図	23
4.4	Z エラーの伝播．左図と右図は同じ操作を意味する	24
4.5	AB および CD 間に対する Connection 操作	24
4.6	Connection 操作の Fidelity	27
4.7	ABD,EFH および IJ 間に対する Add 操作	27
4.8	ABDEFHJ,KL および MN 間に対する Fanout 操作	31
4.9	Swapping,QNC それぞれの Fidelity の比較	36
4.10	Z-error 発生パターン早見表	36
5.1	X エラーの伝播．左図と右図は同じ操作を意味する	38
5.2	Connection 操作の Fidelity	40
5.3	最終的に作成される Bell-pair に X エラーが乗る初期配置の組合せ	41
5.4	Swapping,QNC それぞれの Fidelity の比較	43
A.1	FIRST 全体会議 2012 で発表したポスター	51

表 目 次

3.1	$\mathbf{Con}_{R \rightarrow T}^C$	19
3.2	$\mathbf{Fanout}_{R_1 \rightarrow T_1, R_2 \rightarrow T_2}^C$	19
3.3	$\mathbf{Add}_{R \rightarrow T}^{C_1, C_2}$	20
3.4	$\mathbf{Rem}_{R \rightarrow T}$	20
3.5	$\mathbf{RemAdd}_{R \rightarrow T_1, T_2}$	20
4.1	Connection 操作における Z エラーの発生パターンとその状態表記	25
4.2	Add 操作におけるエラーの発生パターンとその状態表記	28
4.3	Fanout 操作におけるエラーの発生パターンとその状態表記	32
4.4	量子中継器ネットワークコーディングにより発生する Z エラーのパターン	34
4.5	二箇所の Bell-pair にエラーが発生する全パターンのまとめ	35
4.6	Φ_{AF} と Φ_{BE} の相関係数	37
5.1	Connection 操作における X エラーの発生パターンとその状態表記	39
5.2	量子中継器ネットワークコーディングにより発生する X エラーのパターン	41
5.3	二箇所の Bell-pair に X エラーが発生する全パターンのまとめ	43

第1章 はじめに

1.1 序論

20世紀初頭，黒体放射に代表される古典的なニュートン力学で説明できないミクロ領域の事象が発見された．これらの事象を説明可能な新たな物理法則の構築が求められた結果，1920年代に入りドイツの物理学者である Werner Heisenberg は行列力学を，ほぼ同時期にハンガリーの物理学者 Erwin Schrödinger が波動力学をそれぞれ完成させ量子力学の基礎を確立させることとなる．量子力学はこれまで説明不可能だったいくつかの挙動に矛盾なく解説を与えたが，我々の常識的な感覚から大きく離れたものとなっており，量子力学の正当性に関わる論争は以降数十年続くこととなる．この論争の代表的な事例として，半分の確率で毒ガスが発生する箱の中において猫が生死重ねあわせ状態になると主張するシュレディンガーの猫と呼ばれる思考実験が挙げられる．量子力学の確率解釈を巨視的な実験系に置き換えた際の異常性を示すものである．しかし現在では量子力学はミクロ領域における物理現象を矛盾無く表現しており正当性を有していると考えられている．

近年，トンネル効果や非局所性などに代表される我々の直感に反した量子力学特有の数々の事象を利用する方法が模索されてきた．その代表例が量子コンピュータである．1980年代に Richard Feynman は [1, 2]，量子系のシミュレーションを古典的なシステム上で行う場合，粒子の数により表現される状態空間の次元が指数関数的に増加することから著しく非効率的だと指摘した．従って，量子システムは他の量子系をシミュレートする必要があると考えられた．1980年代に，David Deutsch [3] らはチューリングマシンの概念を拡張し，ユニバーサルな量子コンピュータの最初の厳密なモデルを提案する．量子コンピュータでは，量子力学に基づき 0 と 1 の任意の割合・位相を持つ重ね合わせ状態で記述される量子ビットを用いて並列計算を行う．しかし，量子コンピュータ実現のための様々な技術的課題は，当時の微細加工技術の水準では解決不能とされており，量子コンピュータの研究は停滞する．しかしながら，現在でも計算機の主流であるノイマン型コンピュータの性能の向上は，あと十数年で滞ってしまうと考えられている．トランジスタの小型化によって，高速化が進んでいる一方で，計算時に排出される熱の増大，量子効果による計算エラーなどの問題が無視できないレベルになりつつあり，18 から 24ヶ月ごとに集積回

路のトランジスタ数が 2 倍になるというムーアの法則 [4] も停滞していくと考えられている。微細加工技術の進歩は量子コンピュータ実現に関わる技術的課題を克服する可能性を示し始めた。また、Shor's アルゴリズム [5] の発見は量子コンピュータが現在主流の暗号方式である RSA 暗号を多項式時間で解読する可能性を示した。これにより、再び量子コンピュータに関わる研究が盛んになっている。

また、量子情報を伝達するための量子通信技術についても研究が進み始めている。量子情報は複製不可能であるため専用のネットワークが必要であるためだ。この量子通信においても古典通信とは全く別の性質を持った潜在的な可能性を保持している。例えば Charles Bennett, Gilles Brassard [6] らによって提案された量子鍵配送が挙げられる。量子鍵配送は通信を行う二者間でのセキュア通信を保証するために、量子力学を用いてランダムな秘密鍵を共有しそれをもとに情報を暗号・復号する手法である。量子鍵配送は既に数十 km 単位での利用が実現しており、また現在商用レベルにある唯一の量子情報技術である。日本においても東京・横須賀間を結ぶ Tokyo QKD Network が発足している。

他に量子ネットワークの有用な利用方法として分散量子計算やブラインド量子計算 [7] など長距離間量子通信を前提とした技術が提案されている。また、大陸間や大都市間での量子鍵配送の実現も望まれる。

このように大規模量子ネットワークの必要性が高まっているが、現在主流の量子ネットワークのプロトコルでは精度の観点から距離に制限がかかる。この問題の解決法として量子中継器を用いたプロトコルが提案されている。量子中継器はいくつかの重要な役割を持つ。具体的には短距離間での物理的なエンタングルメント対を作り、エンタングルメント対の精製を行い、また二つのエンタングルメント対を繋ぎあわせて一つの長いエンタングルメント対を作成する。複数の量子中継器を配置することにより長距離かつ複雑な量子ネットワークは実現可能である。しかしながら情報単位あたりでの量子通信のコストは古典通信と比べて非常に高くなると考えられる。このため通信帯域不足などネットワークのボトルネックに関する問題は一層顕在化すると想定される。

この問題を解決する一つのアプローチとして量子ネットワークコーディングが提案されている。古典ネットワークにおけるボトルネック解消方法としてネットワークコーディング [8, 9] が知られており、量子ネットワークにおいても同様の解決が可能になると期待される。近年、数々の先行研究 [10, 11, 12, 13] により量子ネットワークコーディングの実行方法等が確率されてきた。しかし、そのいずれも理想状態を前提としており、エラーや資源不足が与える影響については未知である。本研究では現実に則したノイズ発生系の通信路から成る量子ネットワークコーディングの有用性を理論的解析から求めることを目標とする。

1.2 本研究の成果

量子中継器ネットワークコーディングの初期状態に Z エラーおよび X エラーが発生する場合の Fidelity をそれぞれ求め、エンタングルメントスワッピングによる経路選択手法と量子中継器ネットワークコーディングの比較を可能にした。また、量子中継器ネットワークコーディングが実用的に使用可能となる初期状態の Fidelity の目安を算出した。

1.3 本論文の構成

本論文は 6 章から構成される。第 2 章では、本研究の背景となる量子情報科学について述べる。第 3 章では、本研究の主題となる量子ネットワークコーディングおよびその関連事項について述べる。第 4 章および第 5 章では、エラー発生系のネットワークにおける量子ネットワークコーディングの理論的解析を行う。最後に第 6 章で本論文の結論と、今後の方針を述べる。

第2章 量子情報科学

本章では、本研究の主要技術である量子情報科学の要素について順を追って説明する。量子情報科学とは量子力学を利用し情報処理や情報伝達を試みる、これまでの情報学と異なった学問である。量子情報科学では、現在の情報学を量子情報科学と区別するため”古典情報科学”と呼ぶ。

2.1 量子ビット

古典的情報の最小単位である古典ビットは0もしくは1の2通りの状態を表現できる。それに対して量子情報の最小単位である量子ビットは0と1だけでなく、両方の状態が同時に“重ね合わさった”状態をとることができる。しかし、量子情報は観測することで古典的な情報に収束してしまい、1量子ビットからは1古典ビットの情報しか取り出すことが出来ず、その際に量子情報は破壊されてしまう。また、量子情報には古典的情報と異なり、任意の情報の複製を作ることができないという性質がある。量子ビットの重ね合わせ状態は、0もしくは1である“確率”，それぞれの確率波の“位相差”によって表記される。

この重ね合わせ状態は、0もしくは1をとる”確率”と、それぞれの確率波の”位相差”によって表記され、ブロッホ球と呼ばれる3次元単位球面にてしばしば表現される。ブロッホ球を図2.1に示す。

2.2 状態ベクトル

量子ビットの状態を量子情報科学では、状態ベクトルと呼ばれる次のような線形結合で表記する。

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.1)$$

ここで、 α, β はそれぞれ $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ を満たす複素数である。この量子状態 $|\psi\rangle$ を観測した際0を得る確率が $|\alpha|^2$ であり、1を得る確率が $|\beta|^2$ となる。

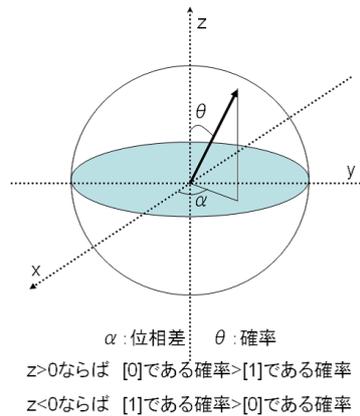


図 2.1: ブロッホ球

より詳しく述べると、量子ビットの状態は純粋状態において二次元複素ベクトル空間 \mathbb{C}^2 内の単位ベクトルによって表記される。さらに、 $|0\rangle$ と $|1\rangle$ は計算基底として知られ、それぞれ以下の列ベクトルで表記される。

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

よって量子ビットは計算基底 $|0\rangle$ および $|1\rangle$ の確率振幅をそれぞれ α, β とすると量子状態 $|\psi\rangle$ は以下の式で表記される。

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

ここで $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{C}$ であり、 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ となる。

一般に n 個の量子ビットからなる量子状態は $|\psi\rangle = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \alpha_x |x\rangle$ のように表記され x は n ビットのビット列を表しており、よって 2^n の基底ベクトルを表す。また、ここで α_x は $\sum_{x \in \{0,1\}^n} |\alpha_x|^2 = 1$ となる複素数である。また、 $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ のような列ベクトルをケットベクトルと呼び、その転置行列 $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = (\alpha^*, \beta^*)$ をブラベクトルと呼ぶ。

また、量子ビット a, b 2 つから成る合成系は $|\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle$ や単に $|\psi_a\rangle|\psi_b\rangle, |\psi_a\psi_b\rangle$ と記述される。この時 $|\psi\rangle = |\psi_a\psi_b\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$ とすると、以下の式で状態が表される。

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

ただし, $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} \in \mathbb{C}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ である. さらに 2 量子ビットから成る状態 $|\psi\rangle$ はここで述べた計算基底だけでなく, 第 2.5 節で述べる Bell 基底を用いても表現可能である.

2.3 量子ゲート

古典コンピュータでの演算では AND ゲートや NOT ゲートが使用されるように, 量子コンピュータ上の演算では量子ゲートが使用される. 量子ゲートはユニタリ行列で記述可能でなければならないという条件がある. 本節では特に本論文で用いるいくつかの量子ゲートについて述べる. まず 1 量子ビットを変換させる σ_X, σ_Z , Hadamard 操作はそれぞれ以下の式で定義される.

$$\sigma_X = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

このアダマール基底を $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ で表し, 計算基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ との関係を下の式に記す.

$$|+\rangle = H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$|-\rangle = H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

もう一つ本論文においても大変よく使われる CNOT ゲート (制御 NOT ゲート) について述べる. このゲートは二量子ビットの変換に用いられる.

$$\begin{aligned} \text{CNOT}^{(A,B)} &= |0\rangle_A |0\rangle_B \langle 0|_A \langle 0|_B + |0\rangle_A |1\rangle_B \langle 0|_A \langle 1|_B \\ &+ |1\rangle_A |1\rangle_B \langle 1|_A \langle 0|_B + |1\rangle_A |0\rangle_B \langle 1|_A \langle 1|_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また，古典コンピュータにとって NAND ゲートがこれのみで全てのゲートを記述できる万能ゲートであるように，量子コンピュータにとっては CNOT ゲートと 1 量子ビットの制御を行うゲートの組み合わせが万能ゲートとなる．

2.4 密度行列

現実のノイズ等が発生する環境下においては状態ベクトルのみでは表現できない量子状態が存在する．古典的な確率の重ね合わせなど，このような状態の表現には密度行列を用いる．

密度行列は以下の式で定義される．

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|.$$

ここで p_i はそれぞれの状態 $|\psi_i\rangle$ に対する確率を示す．

例として， $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ に対しての密度行列は以下の式のように表記される．

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = (\alpha^*, \beta^*) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^*\alpha & \alpha^*\beta \\ \alpha\beta^* & \beta^*\beta \end{pmatrix}$$

参考に， $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ とした場合，密度行列を用いた表記は以下の式のようになる．

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = |\psi^+\rangle\langle\psi^+|$$

同様に， $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ を用いた密度行列の表記も述べる．

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|$$

2.4.1 純粋状態と混合状態

純粋状態とは密度行列 ρ 上での $\text{Tr}(\rho^2) = 1$ であり，状態ベクトルで表記可能な状態である．ある量子系に対して原理的に許される最大限状態を指定した状態を示す．規格化条

件, $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ を満たす. 対して純粋状態でない状態を混合状態という. 純粋状態が古典的に重ね合わさった状態を表す. 密度行列で表記可能である.

例えば次の密度行列で表される式は混合状態である.

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$$

特に, この式で表されるような非対角成分が 0 であるものは古典混合状態と呼ばれ, コインの裏と表が確率的に代表されるような古典的確率共存を示し, これは量子性を有していない. 古典混合状態はどのような基底で測定しても回転をかけても同じ状態を表す. 例えばこの式に基本的な量子ゲートのひとつであるアダマールゲートを作用させると,

$$\rho'_1 = H\rho_1H^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \frac{1}{2}|+\rangle\langle +| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle -| \text{ となる.}$$

ここで初期状態 ρ_1 と結果の ρ'_1 が同一である点に注目したい.

また, 純粋状態の例 $|+\rangle$ は密度行列で以下の式で表される.

$$\rho_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

先ほどと同様にアダマールゲートを作用させる.

$$\rho'_2 = H\rho_2H^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| \text{ となる.}$$

先ほどの古典混合状態 ρ_1 と違い, 状態が変わることが分かる. 密度行列上の非対角成分が量子的な性質をもたらすコヒーレンスを表している. また, 純粋状態に対してノイズ等でエラーが乗ると密度行列上のノルムが小さくなり, 量子的な性質が失われていき古典混合状態へと近づく. この過程をデコヒーレンスという.

2.4.2 Fidelity

2つの量子状態がどのくらい近しいかを示す指標の一つが忠実度 (Fidelity) である. Fidelity は純粋状態 $|\psi\rangle$ と混合状態 ρ を用いて次の式により定義される.

$$F = \langle\psi|\rho|\psi\rangle$$

例えば、 $|0\rangle$ を用意するための初期設定の成功確率 $p = 0.90$ だった場合、密度行列の一例は次の式で表現される。

$$0.90 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.10 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.90 & 0 \\ 0 & 0.10 \end{pmatrix} = 0.9|0\rangle\langle 0| + 0.1|1\rangle\langle 1|$$

この場合において、Fidelity は上の式の対角行列における左上の成分を表す。

2.5 エンタングルメント

集団を構成する個々の対象が独立した量子状態を持たない集団を“量子もつれ状態”にある、という。“量子もつれ状態”にある集団を“エンタングルメント”と呼ぶ。例えば、複数の量子によって構成されたエンタングルメントにおいて、どれかの量子の値を測定すると残りの量子の測定するまでもなく確定的に予測されてしまう。この性質はそれぞれの測定がどんなに離れていようと成り立ち、量子力学が局所实在論に基づく古典論とは異なることを示している。

最大限にもつれ合った二つのエンタングルメントしている量子ビットを Bell-pair と呼ぶ。また、以下の 4 状態の組合せは Bell 基底として度々用いられる。

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで、例えば $|\Phi^+\rangle$ を用意したいが、確率 p で σ_Z のかかるエラーが発生するとする。第 2.4.2 節で述べた Fidelity を用いて $F = 1 - p$ とした時、この量子状態 ρ は以下の式で表現される。

$$\rho = F|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1 - F)|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| \quad (2.2)$$

2.5.1 GHZ

また、3 個以上の量子からなる Bell-pair は特に GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) [14] 状態と呼ぶ。 n (ただし $n \geq 3$) 個の量子からなる GHZ 状態の表記方法について、本論文に

おいては下記の式に準ずる .

$$|\Phi_n^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n}).$$

2.6 量子回路

量子回路は古典コンピュータにおける論理回路に類似しており，量子計算の過程を表現および可視化するための主要な方法である．量子回路と論理回路の主な違いとして，論理回路では適宜ワイヤを分割し必要な数のビットを得ることができたが，量子情報は複製不可能定理 [15] により複製ができないことが挙げられる．図 2.2 に量子回路の例を示す．この図において，また，この表示方式では各水平の線は量子ビットの状態遷移を意味する．

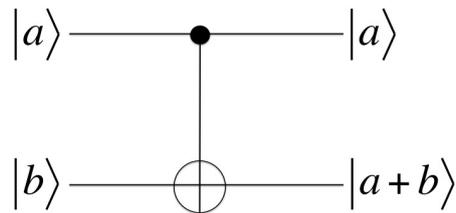


図 2.2: 量子回路の例 (CNOT ゲート)

2.7 量子ネットワーク

量子の複製不可能性のために量子情報を伝達するためには専用のネットワークが必要である．量子通信を拡張した量子ネットワーク [16] の研究は長年行われてきたが，その手法は大きく二つに分けられる．

- 量子チャネルを用いて転送する手法
- Bell-pair を用いて共有する手法

量子チャネルを用いる手法は，光ファイバ等の物理的な通信路を用いて量子ビットを転送する．その通信品質は距離に依存し，転送可能な距離は光ファイバの減衰率や検出器の雑音から最大でも 150km 程度と制限がかかり数百から数千 km 単位といった長距離間での量子通信は不可能である．現在のところ使用目的は量子鍵配送 [17, 6, 18] のみであり，100km 程度の中距離間での伝送路が世界各地で確立している [19, 20] ．

Bell-pair を用いた量子ビットの転送は End と End に Bell-pair を共有し、更に 2 ビットの古典通信を行うことにより実現する。この手法における通信品質は Bell-pair の Fidelity に依存する。

2.8 量子中継器ネットワーク

前節で述べた量子ネットワークの手法はいずれも 1 対 1 通信を前提としているほか、距離に制限のかかるものであった。対して、量子ネットワークの活用法として分散量子コンピューティングや量子センサネットワークなどが提案されており、量子ネットワークの複雑化・長距離化が望まれている。本節ではそれらを実現すべく提案されている量子中継器ネットワーク [21, 22, 23] について述べる。

本研究における量子中継器ネットワークとは、複数の量子中継器と無向古典通信に加え、隣接量子中継器間にそれぞれ一組ずつ共有された EPR-pair によって構成されるネットワークを指す。量子通信を行う際には、エンタングルメントスワッピング [24, 25] を用いて任意の 2 量子中継器間に EPR-pair を共有し、量子テレポーテーションによって量子情報を転送する。このように量子中継器ネットワークでは、非隣接量子中継器間であっても各量子中継器間に共有された EPR-pair を用いることで、局所量子操作のみによって量子通信を行うことが可能となる。

また、量子中継器ネットワークを用いたプロトコル概念図を図 2.4 に示す。

2.8.1 エンタングルメントスワッピング

エンタングルメントスワッピングとは、二組の独立な EPR-pair に対して異なる対に属する 2 量子ビット間で Bell 測定を行い、その結果に基づいた局所量子操作を残る 2 量子ビットに対して行うことで、一つの新たな EPR-pair を生成する操作を指す。

概略図を図 ?? に示す。

また、2 ホップから成るエンタングルメントスワッピングの Fidelity は第 4 章でのエラーモデルを用いて以下の式で表される。

$$F_{output} = F^2 + (1 - F). \quad (2.3)$$

同様に、3 ホップから成るエンタングルメントスワッピングは、

$$F_{output} = F^3 + 3F(1 - F)^2. \quad (2.4)$$

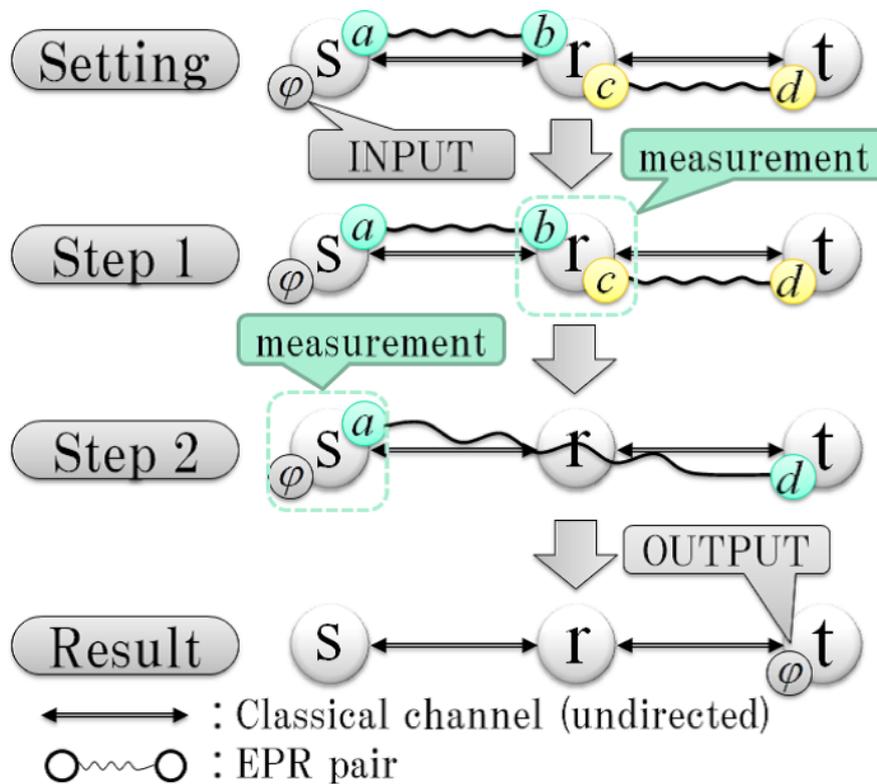


図 2.3: エンタングルメントスワッピングの概略図

にて表される。

2.8.2 量子テレポーテーション

量子状態は直接観測された瞬間に破壊されてしまうため、量子状態の転送には特殊な方法が必要となる。まず、複製したい量子と Bell ペアを構成する片方の量子との間で Bell 測定を行う。測定の瞬間に二つの量子状態は破壊され、Bell ペアの他方の量子には複製したい量子の入力状態が転送される。さらに Bell 測定の結果に基づく変換操作を行うことで、この量子は複製したい量子の完全な複製となる。結果として、入力した量子の量子状態は破壊され、別の場所に完全な複製となった量子が出力されるこの操作は量子テレポーテーションと呼ばれる。

2.8.3 Bell 測定

二つの量子ビットにより構成される系において，二つの量子状態の間のパラメータを測定することを Bell 測定と呼ぶ．Bell 測定の際，二つの量子ビットがそれぞれ別の量子ビットとエンタングルメントを構成していても，量子状態を直接観測したわけではないので別の量子ビットの状態は確定しない．また，Bell 測定によって状態間パラメータを測定された二つの量子状態は瞬時に破壊される．

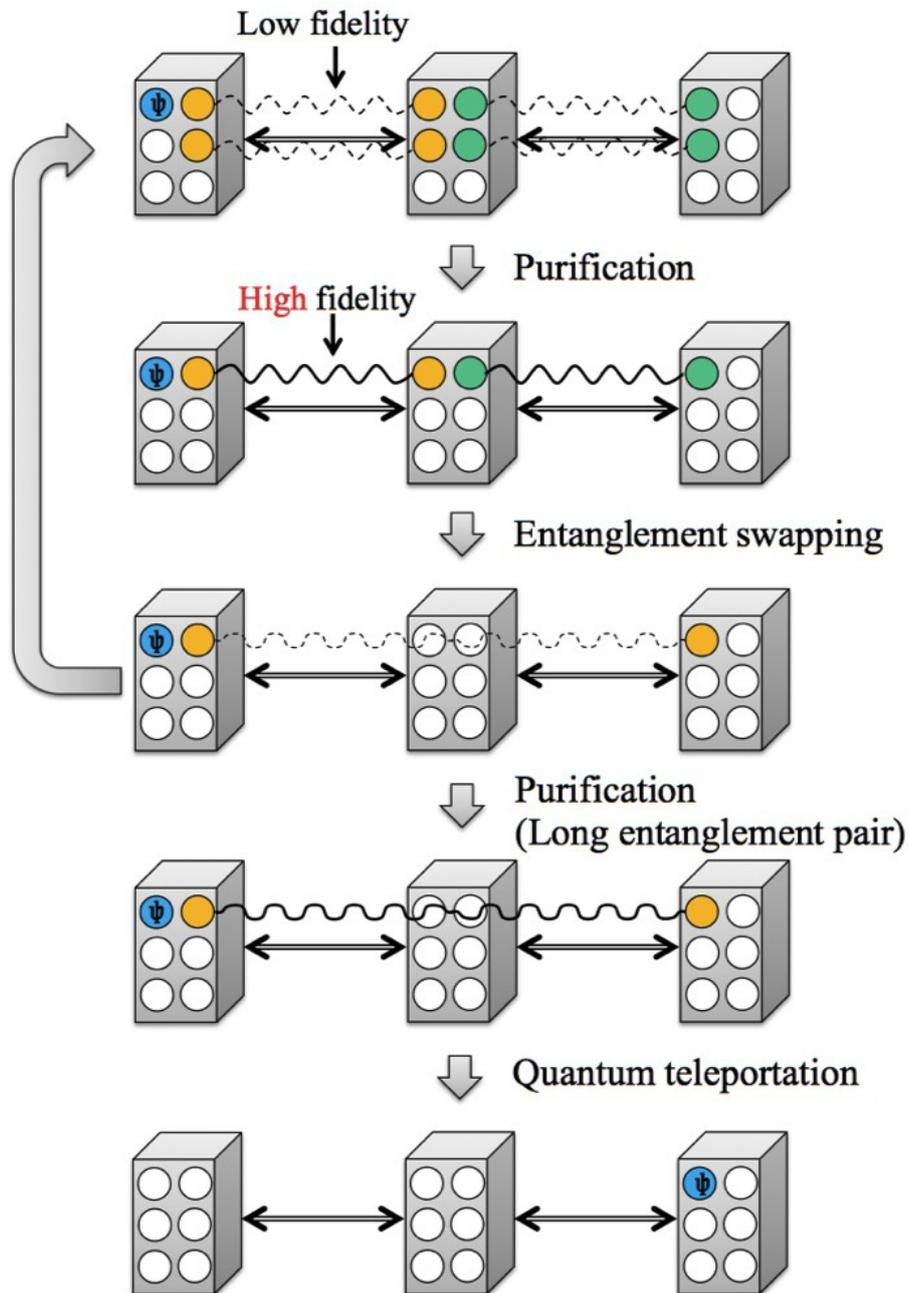


図 2.4: 量子中継器ネットワークプロトコルの概略図

第3章 ネットワークコーディング

本章では、本研究における核の技術と言えるネットワークコーディングについて述べる。まずは古典ネットワークコーディングの歴史や現在の利用方法、次に量子ネットワークコーディングについての既存研究と現状の問題点について述べる。

3.1 古典ネットワークコーディング

Ahlsweede, Cai, Li および Yeung により 2000 年に提案されたネットワークコーディング [26] は、ネットワーク内のルータでパケットを符号化する技術であり、大きな可能性を秘めたアルゴリズムとして注目を集めている。例えばキャパシティが 1 ビットかつ一方向の通信路からなる図 3.1 においてノード S_1, S_2 から送信されるビット情報 a, b を同時にそれぞれノード T_1, T_2 に送る状況を想定する。この場合通常のルーティングのみで転送を行うと、ノード R_1-R_2 間の通信路は a, b 2 つのビットが通ることになりボトルネックとなってしまう。そこで、ノード R_1 においてコーディングを許可し例えば $a \oplus b$ を生成しノードボトルネックを解消する。このとき受信ノード T_1, T_2 には $a \oplus b$ が届くがそれぞれ S_2, S_1 から届いた余分な情報でデコーディングを行うことにより目的の情報を得ることができる。

ネットワークコーディングは、これまでネットワーク上の中継器が主にルーティングを制御する役割だったのに対し中継器にコーディングを行わせるという点において新規性を有す。また、ネットワークコーディングの利点として以下に挙げる 4 点を改良されている。

スループット

スループットの増大はネットワークコーディングの効用として最もよく知られるものである。Ahlsweede らは、ネットワーク中の一部スループットを理論的に最大フローまで高められることを示し、マルチキャスト通信への需要が上がりつつある。

頑健性 (Robustness)

ネットワークコーディングはパケットネットワーク上でのパケット損失およびリン

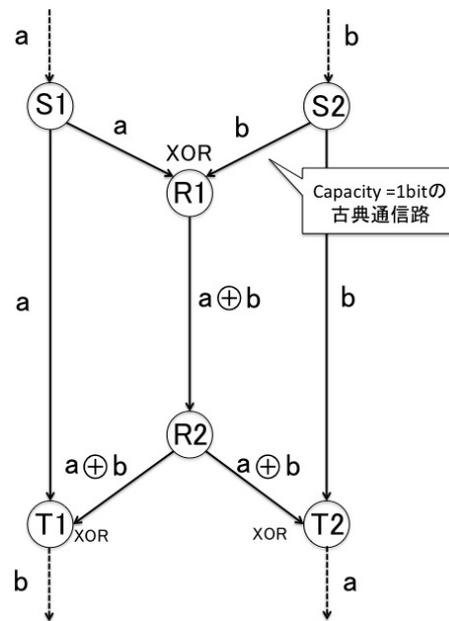


図 3.1: バタフライネットワークにおける古典ネットワークコーディング

ク障害に対する頑健性の利点を有する．このため，ネットワークコーディングは無線ネットワークにおいて非常に相性が良いと考えられる．

計算複雑性

ルーティングにおける通信路最適化問題は組合せ最適化問題に属し，計算量の観点から一般に効率的に解けないことが知られている．しかしネットワークコーディングを用いることによりこの問題は線形時間内で最適解を求めることが可能になる．

セキュリティ

例えば図 3.1 において，もし盗聴者が $a \oplus b$ を盗んだとしても盗聴者は a もしくは b の情報を得ることができない．これはネットワークコーディングがセキュリティを高めていることを示す．

以上に挙げた要素から，ネットワークコーディングは発表されてからこの 10 年間，特に無線ネットワークの研究者から顕著に注目を浴び続けている．

次節以降において量子情報を用いたネットワークコーディングを取り扱うため，それらを量子ネットワークコーディングと表記し，本説で取り上げた古典情報を用いたネットワークコーディングを古典ネットワークコーディングと表記する．また古典ネットワークコーディングにおいては，図 3.1 で示すバタフライネットワークと図 3.1 で示すグレイルネットワーク上でネットワークコーディングが出来ることから，Wang 等の手法 [27] に

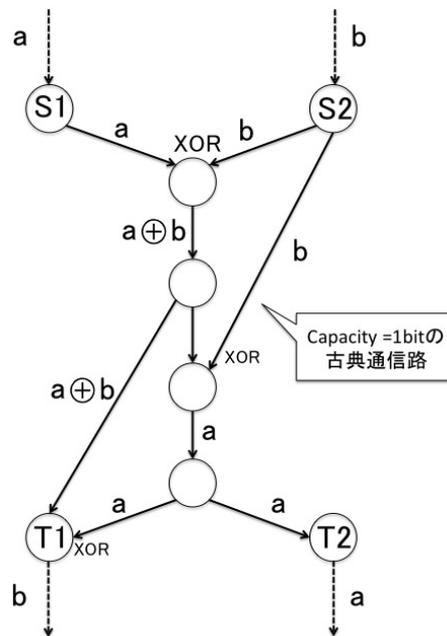


図 3.2: グレイルネットワークにおける古典ネットワークコーディング

よって全てのグラフ構造を持つネットワーク上でネットワークコーディングが行えることが証明されている。

3.2 量子ネットワークコーディング

近年，ネットワークコーディングを量子情報に適応するための研究が行われてきた。

3.2.1 量子ネットワークコーディングの目的

量子通信は基本的には量子力学の複製不可能定理により 1 対 1 間のユニキャスト通信になると想定されている。現在の送受信間の設備も光ファイバで直接繋がっている必要があるなど大掛かりなものとなっている。量子通信の代表的なアプリケーションとして挙げられる量子鍵配送も現段階においてはこの方式に準じているが，将来的にはこの枠を越え量子通信をネットワークとして拡張することが望まれる。また分散量子計算やセンサ量子ネットワーク等，同時に複数の量子通信を必要とするアプリケーションも考案されている。このように量子ネットワークの拡大・複雑化は様々な恩恵をもたらすと思われる。しかし，量子資源のコストは古典資源と比較して非常に高いものになると予想されるため無分別に量子資源を大量消費する運用技術は非現実である。限られた量子資源の中で高品質

な通信を維持するために効果的に用いるネットワーク運用技術が求められるほか、ボトルネックの発生等は将来的に避けられないだろう。

前節で述べたように古典ネットワークコーディングは帯域不足によるボトルネックを改善する。量子ネットワークにおいてもネットワークコーディングのアイデアが通用しうるかどうかの研究が行われてきた。量子ネットワークコーディングは量子ネットワークのボトルネック解消に対する一つのアプローチである。

3.2.2 古典ネットワークコーディングとの対応

ネットワークコーディングとは、ノードにおけるパケットへの操作を許可することにより非ネットワークコーディングでは実現不可能な通信を達成することのできる技術である。量子ネットワークコーディングとは古典通信にのみ想定されていたネットワークコーディングを量子通信に拡張したものである。

例えばバタフライネットワークにおける 2 対間の同時通信は非ネットワークコーディング環境において実現不可能であった。

3.2.3 量子ネットワークコーディングの歴史

量子ネットワークコーディングの研究は、古典情報の学術的興味に端を発する。本節では関連研究をいくつか述べる。

量子ネットワークコーディングの研究は、古典情報の学術的興味に端を発する。Shi, Soljann [13] はネットワークコーディングにより完全マルチキャスト通信を達成するプロトコルを提案した。また林 [10]、岩間、西村らは量子バタフライネットワークにおいて完璧な同時通信を実行することはできないことを示した。

3.2.4 量子中継器ネットワークコーディング

これまでに挙げた量子ネットワークコーディングに関する研究は、量子通信路によって構成され、新たな量子レジスタを容易に導入できる抽象的なネットワークモデルを対象としたものが中心であった。2012 年、佐藤等 [28] は量子中継器によって構成されたネットワーク上で運用可能であり、かつ、必要となる量子資源の極小化を目指した量子ネットワークコーディングプロトコルを提案した。このプロトコルでは、古典通信路によって直接接続された量子中継器間にあらかじめ共有されている EPR-pair 以外に量子資源を導入することなく、局所量子操作および古典通信のみによって二組の送信側および受信側中継

表 3.1: $\text{Con}_{R \rightarrow T}^C$

C と R はそれぞれ量子中継器 u に属する量子ビットで,
 T は量子中継器 v に属する量子ビットである .

Step 1. u は CNOT を C, R 間に作用させる .

Step 2. u は R を $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 基底で測定する .
 $a \in \{0, 1\}$ を得る .

Step 3. u は古典通信路を用いて v に a を送信する .

Step 4. もし $a = 1$ ならば v は σ_X を T に行う .

表 3.2: $\text{Fanout}_{R_1 \rightarrow T_1, R_2 \rightarrow T_2}^C$

C, R_1 および R_2 はそれぞれ量子中継器 u に属する量子ビットで,
 T_1 は量子中継器 v に属する量子ビット,
 T_2 は量子中継器 w に属する量子ビットである .

Step 1. u および v は $\text{Con}_{R_1 \rightarrow T_1}^C$ を実行する .

Step 2. u および w は $\text{Con}_{R_2 \rightarrow T_2}^C$ を実行する .

器の間に新たな EPR-pair を生成することが可能である . 図 3.2.4 に初期配置プロトコル終了時点での概念図を示す . プロトコルは主に以下に挙げる 2 つの操作から成る .

Connection

Connection は n ビットの量子状態 $|x\rangle$ に対して , 指定された Control, Resource, Target (以下それぞれ C, R, T と記す) 量子ビットに従って CNOT 等の操作を行い , $n-1$ ビットの量子状態 $|y\rangle$ を得る非ユニタリ操作を指す . 実行手順を表 3.1 以下に示す . また , Connection の応用で Fanout および Add 操作も行われる .

Removal

Removal は n ビットの量子状態 $|x\rangle$ に対して , 指定された Resource, Target 量子ビットに従って Hadamard 基底による Bell 測定 , σ_Z を作用させ , Resource 量子ビットを消去することで $n-1$ ビットの量子状態 $|y\rangle$ を得る非ユニタリ操作を指す . 実行手順を表 3.4 以下に示す . また , Removal の応用で RemovalAdd 操作も行われる .

表 3.3: $\text{Add}_{R \rightarrow T}^{C_1, C_2}$

C_1, C_2 および R はそれぞれ量子中継器 u に属する量子ビットで,
 T は量子中継器 v に属する量子ビットである .

Step 1. u は CNOT を C_1, R 間に作用させる .

Step 2. u および v は $\text{Con}_{R \rightarrow T}^{C_2}$ を実行する .

表 3.4: $\text{Rem}_{R \rightarrow T}$

R は量子中継器 u に属する量子ビットで,
 T は量子中継器 v に属する量子ビットである .

Step 1. u はアダマールを R に作用させる .

Step 2. u は基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を用いて R を測定する .
 $a \in \{0, 1\}$ を得る .

Step 3. v は古典通信路を用いて v に a を送信する .

Step 4. もし $a = 1$ ならば v は σ_Z を T に行う .

表 3.5: $\text{RemAdd}_{R \rightarrow T_1, T_2}$

R は量子中継器 u に属する量子ビットで,
 T_1 は量子中継器 v に属する量子ビット,
 T_2 は量子中継器 w に属する量子ビットである .

Step 1. u はアダマールを R に作用させる .

Step 2. u は基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ を用いて R を測定する .
 $a \in \{0, 1\}$ を得る .

Step 3. v は古典通信路を用いて v および w に a を送信する .

Step 4. もし $a = 1$ ならば v および w は σ_Z をそれぞれ T_1, T_2 に行う .

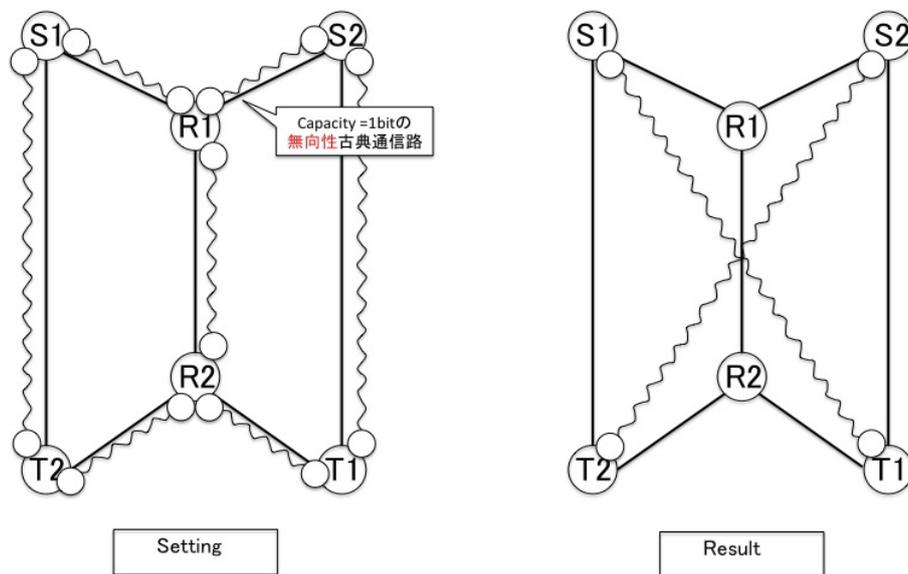


図 3.3: 量子中継器ネットワークコーディング初期配置および Result の概念図

第4章 QNCにおけるZ-errorの理論的解析

本章では、初期資源にZエラーが含まれている場合における理論的解析を行う。

図4のように複数の量子中継器・Bell-pair からなるバタフライ型のネットワークを想定する。この時、図4におけるS1ノードからT1ノードへと、S2ノードからT2ノードへと同時通信を行うためには以下の二つのアプローチが考えられる。

- エンタングルメントスワッピングを二回行うことによる解決
- 量子ネットワークコーディングによる解決

バタフライネットワーク上での同時通信の解決法について、エンタングルメントスワッピングを用いる概念図を4に、量子ネットワークコーディングを用いる概念図を4にそれぞれ示す。

この二案を比較すると、量子ネットワークコーディングの操作は一回で済むのに対し、エンタングルメントスワッピングは二回行う必要がある。ただし、量子ネットワークコーディングはより多くのリンクと操作が必要となり、エラーの伝播等やFidelityの上がり方など、負の影響が大きいと考えられる。どちらのアプローチに優位性があるかを知るためには特に量子ネットワークコーディングにおける振る舞いを理解する必要がある。本論文ではその最初の足がかりとしてZエラーのみに制限したノイズモデルを使用し、それぞれのFidelityを解析する。

4.1 エラーモデルの定義

図4の初期配置における各Bell-pairがノード間で共有される際に確率 p でZエラーが発生する場合、各Bell-pairの状態は式4.1で表される。ここで $F = 1 - p$ とする。 $p = \alpha$ で σ_z が起きる。本章におけるエラーモデルはXエラーを含まない。また、CNOTや測定をはじめとしたローカルオペレーションは成功確率1でエラーも発生しないものとする。

$$\rho = F|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1 - F)|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| \quad (4.1)$$

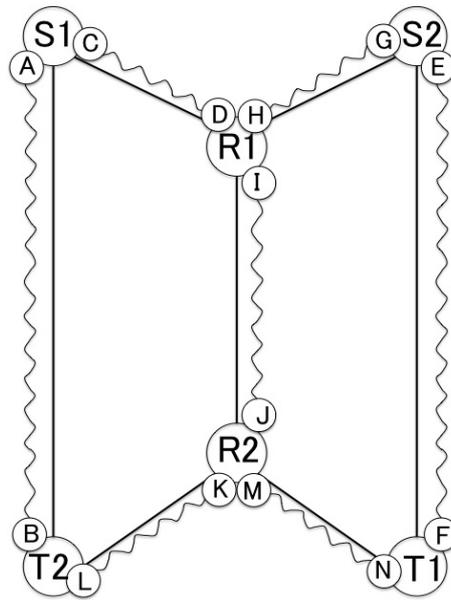


図 4.1: 量子ネットワークコーディング初期配置

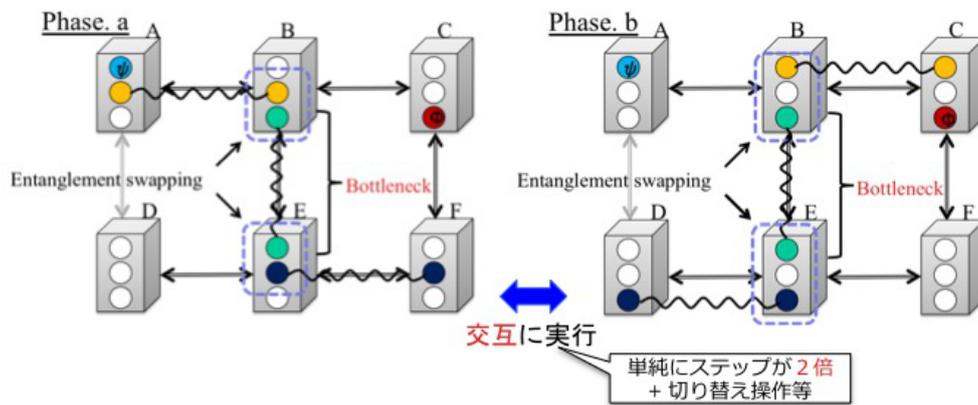


図 4.2: エンタングルメントスワッピングを用いた同時通信の解決法概念図

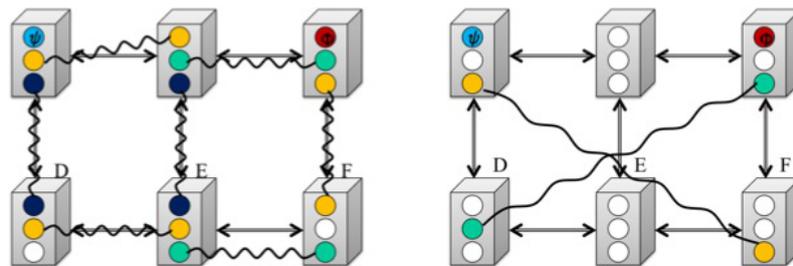


図 4.3: 量子ネットワークコーディングを用いた同時通信の解決法概念図

また，本章で扱う Z エラーについて，Z エラーは図 4.4 のように伝播することに留意する．

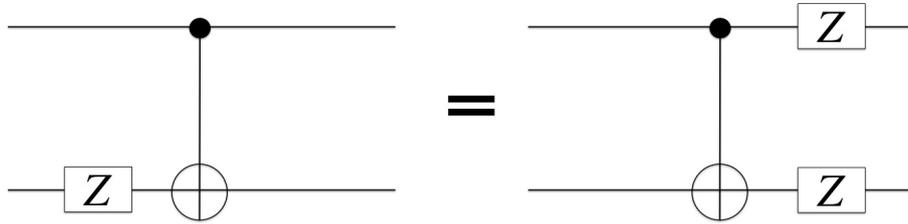


図 4.4: Z エラーの伝播．左図と右図は同じ操作を意味する．

4.2 Connection

Connection に用いる二つの Bell-pair，AB と CD にはそれぞれ任意の確率で Z エラーがかかっており，以下の式でそれぞれの Connection 操作前の初期状態を表現できる．

$$|\psi_{AB}\rangle = |00\rangle + (-1)^{S_{AB}}|11\rangle \quad (4.2)$$

$$|\psi_{CD}\rangle = |00\rangle + (-1)^{S_{CD}}|11\rangle \quad (4.3)$$

Connection 操作終了後には，

$$|\psi_{ABD}\rangle = |000\rangle + (-1)^{S_{ABD}}|111\rangle. \quad (4.4)$$

となる．

また，この Connection 操作の回路を図 4.5 に示し，

Connection 操作開始時と終了時におけるエラーの状態を表 4.1 で表す．

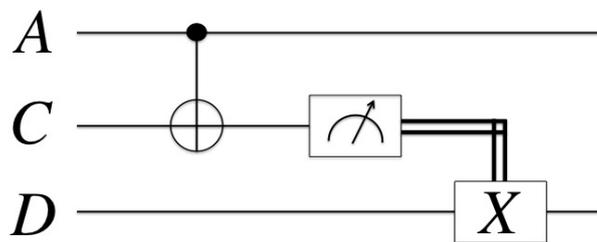


図 4.5: AB および CD 間に対する Connection 操作

case#	(S_{CD}, S_{AB})	$ \psi_i\rangle_{Init}$	Resulting S_{ABD}
0	0,0	$ \psi_0\rangle$	0
1	0,1	$ \psi_1\rangle = \sigma_Z^A \psi_0\rangle$	1
2	1,0	$ \psi_2\rangle = \sigma_Z^C \psi_0\rangle$	1
3	1,1	$ \psi_3\rangle = \sigma_Z^A \sigma_Z^C \psi_0\rangle$	0

表 4.1: Connection 操作における Z エラーの発生パターンとその状態表記

Bell 基底において，非対角成分は全て 0 の場合以下の式で表記可能である．

$$\begin{aligned}
\rho_{AB} \otimes \rho_{CD} = & F_{AB} F_{CD} (|\Phi^+\rangle|\Phi^+\rangle)(\langle\Phi^+|\langle\Phi^+|) \\
& + F_{AB}(1 - F_{CD})(|\Phi^+\rangle|\Phi^-\rangle)(\langle\Phi^+|\langle\Phi^+|) \\
& + (1 - F_{AB})F_{CD}(|\Phi^-\rangle|\Phi^+\rangle)(\langle\Phi^+|\langle\Phi^+|) \\
& + (1 - F_{AB})(1 - F_{CD})(|\Phi^-\rangle|\Phi^-\rangle)(\langle\Phi^+|\langle\Phi^+|) \quad (4.5)
\end{aligned}$$

BC 間に CNOT を作用させ，C を測定し，その結果に基づいて D に σ_X を作用させる．

Case 0:

$$|\psi_0\rangle = (|0000\rangle + |0011\rangle + |1110\rangle + |1101\rangle)_{ABCD} \quad (4.6)$$

C を $\{0, 1\}$ 基底で測定したとき，

$$Prob(C = 0) = 0.5 \text{ で } |\psi_0\rangle \xrightarrow{I_D} |000\rangle + |111\rangle \quad (4.7)$$

$$Prob(C = 1) = 0.5 \text{ で } |\psi_0\rangle \xrightarrow{X_D} |000\rangle + |111\rangle \quad (4.8)$$

をそれぞれ得る．

また，この式 4.8 がエラーが発生しない場合における Connection 操作終了時点での状態である．

Case 1:

$$|\psi_1\rangle = (|0000\rangle - |0011\rangle + |1110\rangle - |1101\rangle)_{ABCD} \quad (4.9)$$

C を $\{0, 1\}$ 基底で測定したとき，

$$Prob(C = 0) = 0.5 \text{ で } |\psi_1\rangle \xrightarrow{I_D} |000\rangle - |111\rangle \quad (4.10)$$

$$Prob(C = 1) = 0.5 \text{ で } |\psi_1\rangle \xrightarrow{X_D} -|000\rangle + |111\rangle \quad (4.11)$$

をそれぞれ得る .

Case 2:

$$|\psi_2\rangle = (|0000\rangle + |0011\rangle - |1110\rangle - |1101\rangle)_{ABCD} \quad (4.12)$$

C を $\{0, 1\}$ 基底で測定したとき ,

$$Prob(C = 0) = 0.5 \text{ で } |\psi_2\rangle \xrightarrow{I_D} |000\rangle - |111\rangle \quad (4.13)$$

$$Prob(C = 1) = 0.5 \text{ で } |\psi_2\rangle \xrightarrow{X_D} |000\rangle - |111\rangle \quad (4.14)$$

をそれぞれ得る .

Case 3:

$$|\psi_4\rangle = (|0000\rangle - |0011\rangle - |1110\rangle + |1101\rangle)_{ABCD} \quad (4.15)$$

C を $\{0, 1\}$ 基底で測定したとき ,

$$Prob(C = 0) = 0.5 \text{ で } |\psi_3\rangle \xrightarrow{I_D} |000\rangle + |111\rangle \quad (4.16)$$

$$Prob(C = 1) = 0.5 \text{ で } |\psi_3\rangle \xrightarrow{X_D} -|000\rangle - |111\rangle \quad (4.17)$$

をそれぞれ得る .

また , 全ての Case において $Prob(C = 0) = 0.5$ であることと , $|\psi_3\rangle = |\psi_0\rangle$, $|\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle$ であることから , $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ とした時に操作終了時点での状態 ρ は ,

$$\rho = (F_{AB}F_{CD} + (1 - F_{AB})(1 - F_{CD}))\rho_0 + ((1 - F_{AB})F_{CD} + F_{AB}(1 - F_{CD}))\rho_1 \quad (4.18)$$

となる .

ここでの Connection 操作において , $F_{AB} = F_{CD}$ とすると操作前の Fidelity を Y 軸に操作後の Fidelity を X 軸にとると図 4.6 となる .

また , 量子ビット EFGH 間における Connection 操作においても同様である .

4.3 Add

Add に用いる三つの Bell-pair, ABD と EFH と IJ にはそれぞれ任意の確率で Z エラーがかかっており , 以下の式でそれぞれの Add 操作前の初期状態を表現できる .

$$|\psi_{ABD}\rangle = |000\rangle + (-1)^{S_{ABD}}|111\rangle \quad (4.19)$$

$$|\psi_{EFH}\rangle = |000\rangle + (-1)^{S_{EFH}}|111\rangle \quad (4.20)$$

$$|\psi_{IJ}\rangle = |00\rangle + (-1)^{S_{IJ}}|11\rangle \quad (4.21)$$

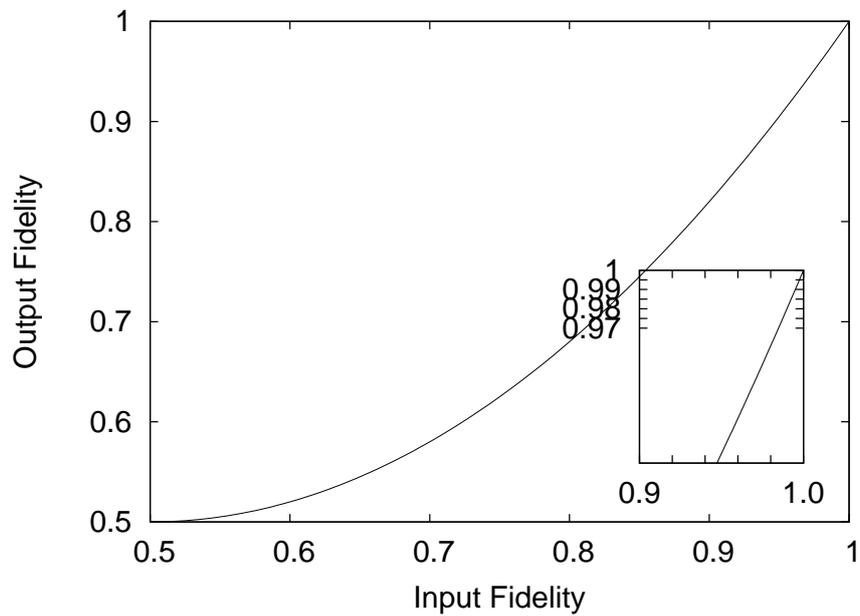


図 4.6: Connection 操作の Fidelity

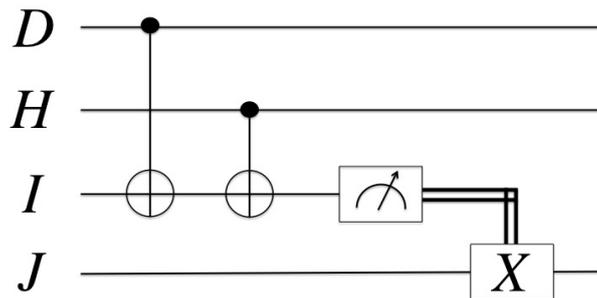


図 4.7: ABD,EFH および IJ 間に対する Add 操作

Add 操作終了後には,

$$\begin{aligned}
 |\psi_{Add}\rangle = & \quad (|000000\rangle + (-1)^{S_2}|111111\rangle)_{ABDEFH}|0\rangle_J \\
 & + (-1)^{S_1}(|000111\rangle + (-1)^{S_0}|111000\rangle)_{ABDEFH}|1\rangle_J. \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

また, この Add 操作の回路を図 4.7 に示し, Add 操作開始時と終了時におけるエラーの状態を表 4.2 で表す.

case#	(S_{IJ}, S_{EF}, S_{AB})	init $ \psi_i\rangle$	Resulting (S_2, S_1, S_0)
0	0,0,0	$ \psi_0\rangle$	0,0,0
1	0,0,1	$ \psi_1\rangle = \sigma_Z^A \psi_0\rangle$	1,0,1
2	0,1,0	$ \psi_2\rangle = \sigma_Z^E \psi_0\rangle$	1,1,1
3	0,1,1	$ \psi_3\rangle = \sigma_Z^J \psi_0\rangle$	0,1,0
4	1,0,0	$ \psi_4\rangle = \sigma_Z^A \sigma_Z^E \psi_0\rangle$	0,1,0
5	1,0,1	$ \psi_5\rangle = \sigma_Z^A \sigma_Z^J \psi_0\rangle$	1,1,1
6	1,1,0	$ \psi_6\rangle = \sigma_Z^E \sigma_Z^J \psi_0\rangle$	1,0,1
7	1,1,1	$ \psi_7\rangle = \sigma_Z^A \sigma_Z^E \sigma_Z^J \psi_0\rangle$	0,0,0

表 4.2: Add 操作におけるエラーの発生パターンとその状態表記

Bell 基底において, 非対角成分は全て 0 の場合,

$$\begin{aligned}
\rho_{ABD} \otimes \rho_{EFH} \otimes \rho_{IJ} = & F_{ABD} F_{EFH} F_{IJ} (|\Phi_3^+\rangle |\Phi_3^+\rangle |\Phi^+\rangle) (\langle \Phi^+ | \langle \Phi_3^+ | \langle \Phi_3^+ |) \\
& + F_{ABD} F_{EFH} (1 - F_{IJ}) (|\Phi_3^+\rangle |\Phi_3^+\rangle |\Phi^-\rangle) (\langle \Phi^- | \langle \Phi_3^+ | \langle \Phi_3^+ |) \\
& + F_{ABD} (1 - F_{EFH}) F_{IJ} (|\Phi_3^+\rangle |\Phi_3^-\rangle |\Phi^+\rangle) (\langle \Phi^+ | \langle \Phi_3^- | \langle \Phi_3^+ |) \\
& + F_{ABD} (1 - F_{EFH}) (1 - F_{IJ}) (|\Phi_3^+\rangle |\Phi_3^-\rangle |\Phi^-\rangle) (\langle \Phi^- | \langle \Phi_3^- | \langle \Phi_3^+ |) \\
& + (1 - F_{ABD}) F_{EFH} F_{IJ} (|\Phi_3^-\rangle |\Phi_3^+\rangle |\Phi^+\rangle) (\langle \Phi^+ | \langle \Phi_3^+ | \langle \Phi_3^- |) \\
& + (1 - F_{ABD}) F_{EFH} (1 - F_{IJ}) (|\Phi_3^-\rangle |\Phi_3^+\rangle |\Phi^-\rangle) (\langle \Phi^- | \langle \Phi_3^+ | \langle \Phi_3^- |) \\
& + (1 - F_{ABD}) (1 - F_{EFH}) F_{IJ} (|\Phi_3^-\rangle |\Phi_3^-\rangle |\Phi^+\rangle) (\langle \Phi^+ | \langle \Phi_3^- | \langle \Phi_3^- |) \\
& + (1 - F_{ABD}) (1 - F_{EFH}) (1 - F_{IJ}) (|\Phi_3^-\rangle |\Phi_3^-\rangle |\Phi^-\rangle) (\langle \Phi^- | \langle \Phi_3^- | \langle \Phi_3^- |)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

DI 間および HI 間に CNOT を作用させ, I を測定し, その結果に基づいて J に σ_X を作用させる.

Case 0:

$$\begin{aligned}
|\psi_0\rangle = & (|000000\rangle + |111111\rangle)_{ABDEFH} \otimes (|00\rangle + |11\rangle)_{IJ} \\
& + (|000111\rangle + |111000\rangle)_{ABDEFH} \otimes (|01\rangle + |10\rangle)_{IJ}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

I を $\{0, 1\}$ 基底で測定し ,

$$Prob(I = 0) = 0.5 \text{ で } |\psi_0\rangle \xrightarrow{I_J} (|0000000\rangle + |0001111\rangle + |1110001\rangle + |1111110\rangle)_{ABDEFH} \quad (4.25)$$

$$Prob(I = 1) = 0.5 \text{ で } |\psi_0\rangle \xrightarrow{X_J} (|0000000\rangle + |0001111\rangle + |1110001\rangle + |1111110\rangle)_{ABDEFH} \quad (4.26)$$

よって ,

$$|\psi_0\rangle = (|0000000\rangle + |1111111\rangle)_{ABDEFH}|0\rangle_J + (|0001111\rangle + |1110001\rangle)_{ABDEFH}|1\rangle_J \quad (4.27)$$

を得る .

また , この式 4.27 がエラーが発生しない場合における Add 操作終了時点での状態を表す .

Case 1:

表 4.2 より , $|\psi_1\rangle = \sigma_Z^A |\psi_0\rangle$ であるので ,

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle = & (|0000000\rangle - |1111111\rangle)_{ABDEFH} \otimes (|00\rangle + |11\rangle)_{IJ} \\ & + (|0001111\rangle - |1110001\rangle)_{ABDEFH} \otimes (|01\rangle + |10\rangle)_{IJ} \end{aligned} \quad (4.28)$$

I を $\{0, 1\}$ 基底で測定し ,

$$Prob(I = 0) = 0.5 \text{ で } |\psi_1\rangle \xrightarrow{I_J} (|0000000\rangle + |0001111\rangle - |1110001\rangle - |1111110\rangle)_{ABDEFH} \quad (4.29)$$

$$Prob(I = 1) = 0.5 \text{ で } |\psi_1\rangle \xrightarrow{X_J} (|0000000\rangle + |0001111\rangle - |1110001\rangle - |1111110\rangle)_{ABDEFH} \quad (4.30)$$

をそれぞれ得る .

よって測定結果によらず

$$|\psi_1\rangle = (|0000000\rangle - |1111111\rangle)_{ABDEFH}|0\rangle_J + (|0001111\rangle - |1110001\rangle)_{ABDEFH}|1\rangle_J \quad (4.31)$$

となる .

以下 , 同様に Case 2 から Case 7 の最終結果を記す .

Case 2:

$$|\psi_2\rangle = (|0000000\rangle - |1111111\rangle)_{ABDEFH}|0\rangle_J - (|0001111\rangle - |1110001\rangle)_{ABDEFH}|1\rangle_J \quad (4.32)$$

Case 3:

$$|\psi_3\rangle = (|000000\rangle + |111111\rangle)_{ABDEFH}|0\rangle_J - (|000111\rangle + |111000\rangle)_{ABDEFH}|1\rangle_J \quad (4.33)$$

Case 4:

$$|\psi_4\rangle = (|000000\rangle + |111111\rangle)_{ABDEFH}|0\rangle_J - (|000111\rangle + |111000\rangle)_{ABDEFH}|1\rangle_J \quad (4.34)$$

Case 5:

$$|\psi_5\rangle = (|000000\rangle - |111111\rangle)_{ABDEFH}|0\rangle_J - (|000111\rangle - |111000\rangle)_{ABDEFH}|1\rangle_J \quad (4.35)$$

Case 6:

$$|\psi_6\rangle = (|000000\rangle - |111111\rangle)_{ABDEFH}|0\rangle_J + (|000111\rangle - |111000\rangle)_{ABDEFH}|1\rangle_J \quad (4.36)$$

Case 7:

$$|\psi_7\rangle = (|000000\rangle + |111111\rangle)_{ABDEFH}|0\rangle_J + (|000111\rangle + |111000\rangle)_{ABDEFH}|1\rangle_J \quad (4.37)$$

また、全ての Case において $Prob(I = 0) = 0.5$ であることと、 $|\psi_7\rangle = |\psi_0\rangle$ 、 $|\psi_6\rangle = |\psi_1\rangle$ 、 $|\psi_5\rangle = |\psi_2\rangle$ 、 $|\psi_4\rangle = |\psi_3\rangle$ であることから、 $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ とした時に操作終了時点での状態 ρ は、

$$\begin{aligned} \rho = & (F_{ABD}F_{EFH}F_{IJ} + (1 - F_{ABD})(1 - F_{EFH})(1 - F_{IJ}))\rho_0 \\ & + ((1 - F_{ABD})F_{EFH}F_{IJ} + F_{ABD}(1 - F_{EFH})(1 - F_{IJ}))\rho_1 \\ & + (F_{ABD}(1 - F_{EFH})F_{IJ} + (1 - F_{ABD})F_{EFH}(1 - F_{IJ}))\rho_2 \\ & + (F_{ABD}F_{EFH}(1 - F_{IJ}) + (1 - F_{ABD})(1 - F_{EFH})F_{IJ})\rho_3 \end{aligned} \quad (4.38)$$

となる。

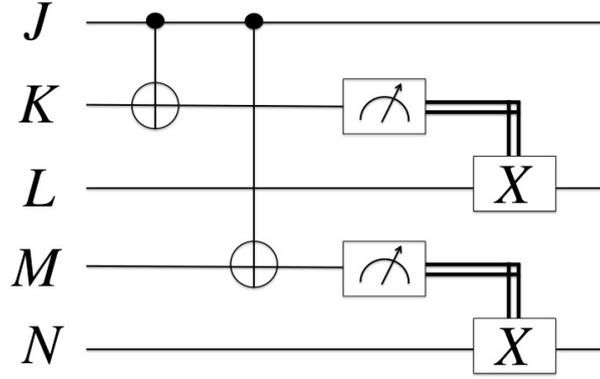


図 4.8: ABDEFHJ, KL および MN 間に対する Fanout 操作

4.4 Fanout

Fanout に用いる量子状態は Add のアウトプットである ABDEFHJ と二組の Bell-pair, KL と MN からなる．それぞれの量子状態には任意の確率でエラーが発生している．以下の式でそれぞれの Fanout 操作前の初期状態を表現できる．

$$\begin{aligned}
 |\psi_{ABDEFHJ}\rangle = & (|000000\rangle + (-1)^{S_2}|111111\rangle)_{ABDEFH}|0\rangle_J \\
 & + (-1)^{S_1}(|000111\rangle + (-1)^{S_0}|111000\rangle)_{ABDEFH}|1\rangle_J
 \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$|\psi_{KL}\rangle = |00\rangle + (-1)^{S_{KL}}|11\rangle \quad (4.40)$$

$$|\psi_{MN}\rangle = |00\rangle + (-1)^{S_{MN}}|11\rangle \quad (4.41)$$

Fanout 操作終了後には，

$$\begin{aligned}
 |\psi_{Fanout}\rangle = & (|000000\rangle + (-1)^{S_2}|111111\rangle)_{ABDEFH}|000\rangle_{JLN} \\
 & + (-1)^{S_1}(|000111\rangle + (-1)^{S_0}|111000\rangle)_{ABDEFH}|111\rangle_{JLN}.
 \end{aligned} \quad (4.42)$$

また，この Fanout 操作の回路を図 4.4 に示し，Fanout 操作開始時と終了時におけるエラーの状態を表 4.3 で表す．なお表 4.3 において Fanout 操作は $|x\rangle_J$ を $|x\rangle_{JLN}^{\otimes 3}$ に変換させるという特性上， S_2 および S_0 に何の影響も及ぼさないため表記を省略する．

JK 間および JM 間に CNOT を作用させ，K, M を $\{0, 1\}$ 基底で測定し，その結果に基づいてそれぞれ L, N に σ_X を作用させる．また，以下の議論において便宜上 $S_0 = 0, S_2 = 0$ としているが，先ほども述べたようにこれらの値は Fanout 操作において値が変わらないことに注意する．

case#	$(S_{MN}, S_{KL}, S_2, S_1, S_0)$	init $ \psi_i\rangle$	Resulting (S_2, S_1, S_0)
0	0,0,×,0,×	$ \psi_0\rangle$	×,0,×
1	0,0,×,1,×	$ \psi_1\rangle = \sigma_Z^J \psi_0\rangle$	×,1,×
2	0,1,×,0,×	$ \psi_2\rangle = \sigma_Z^L \psi_0\rangle$	×,1,×
3	0,1,×,1,×	$ \psi_3\rangle = \sigma_Z^N \psi_0\rangle$	×,1,×
4	1,0,×,0,×	$ \psi_4\rangle = \sigma_Z^J \sigma_Z^L \psi_0\rangle$	×,0,×
5	1,0,×,1,×	$ \psi_5\rangle = \sigma_Z^J \sigma_Z^N \psi_0\rangle$	×,0,×
6	1,1,×,0,×	$ \psi_6\rangle = \sigma_Z^L \sigma_Z^N \psi_0\rangle$	×,0,×
7	1,1,×,1,×	$ \psi_7\rangle = \sigma_Z^J \sigma_Z^L \sigma_Z^N \psi_0\rangle$	×,1,×

表 4.3: Fanout 操作におけるエラーの発生パターンとその状態表記

Case 0:

$Prob(K = 0, M = 0) = 0.25$ で

$$|\psi_0\rangle \xrightarrow{I_L, I_N} (|000000\rangle + |111111\rangle)_{ABDEFH} |000\rangle_{JLN} + (|000111\rangle + |111000\rangle)_{ABDEFH} |111\rangle_{JL} \quad (4.43)$$

ここで,

$$|\phi_0\rangle = (|000000\rangle + |111111\rangle)_{ABDEFH} |000\rangle_{JLN} \quad (4.44)$$

$$|\phi_1\rangle = (|000111\rangle + |111000\rangle)_{ABDEFH} |111\rangle_{JLN} \quad (4.45)$$

とすると $|\psi_0\rangle = |\phi_0\rangle + |\phi_1\rangle$ となる .

また, $Prob(K = 0, M = 1) = 0.25, Prob(K = 1, M = 0) = 0.25, Prob(K = 1, M = 1) = 0.25$ についても同様である . この式 4.45 がエラーが発生しない場合における Fanout 操作終了時点での状態を表す .

以下の Case について結果のみ記す .

Case 1:

$$|\psi_1\rangle = |\phi_0\rangle - |\phi_1\rangle \quad (4.46)$$

Case 2:

$$|\psi_2\rangle = |\phi_0\rangle - |\phi_1\rangle \quad (4.47)$$

Case 3:

$$|\psi_3\rangle = |\phi_0\rangle - |\phi_1\rangle \quad (4.48)$$

Case 4:

$$|\psi_4\rangle = |\phi_0\rangle + |\phi_1\rangle \quad (4.49)$$

Case 5:

$$|\psi_4\rangle = |\phi_0\rangle + |\phi_1\rangle \quad (4.50)$$

Case 6:

$$|\psi_4\rangle = |\phi_0\rangle + |\phi_1\rangle \quad (4.51)$$

Case 7:

$$|\psi_4\rangle = |\phi_0\rangle - |\phi_1\rangle \quad (4.52)$$

この時全ての Case において $Prob(K = 0, M = 0) = Prob(K = 0, M = 1) = Prob(K = 1, M = 0) = Prob(K = 1, M = 1) = 0.25$ であることと, $|\psi_0\rangle = |\psi_4\rangle = |\psi_5\rangle = |\psi_6\rangle$, $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle = |\psi_3\rangle = |\psi_7\rangle$ である.

以降の Removal および RemovalAdd 操作において複製 Z エラーは伝播しない. 簡易な説明を次節以降で記す.

4.5 Removal / RemovalAdd

Removal 操作および RemovalAdd 操作において Z エラーは伝播しない. これは Removal 操作が Connection 操作・Add 操作で, RemovalAdd 操作が Fanout 操作でそれぞれ作成した特殊な状態の量子ビットを削除する操作であることに起因する. 本節の前提において初期状態のみにエラーが発生するため, Connection, Add, Fanout 操作をそれぞれ終えた後に
行う Removal, RemovalAdd 操作には新規の量子ビットが存在せず,

削除それぞれ対応していることに起因する.

4.6 Result

量子ネットワークコーディングの実行によって生み出される二つの Bell-pair $|\Phi^+\rangle_{AF}, |\Phi^+\rangle_{BE}$ にかかる Z エラーのパターンは前節までの議論内で用いた $S_2 = S_0, S_1$ によって分類可能であり, それを表 4.4 に示す. それぞれの Case の発生確率 $Prob_i$ は表記の簡略化のため

case#	$(S_2 = S_0, S_1)$	$ \psi_{AF}\rangle, \psi_{BE}\rangle$
0	(0,0)	$ \Phi^+\rangle_{AF}, \Phi^+\rangle_{BE}$
1	(1,0)	$ \Phi^-\rangle_{AF}, \Phi^+\rangle_{BE}$
2	(1,1)	$ \Phi^+\rangle_{AF}, \Phi^-\rangle_{BE}$
3	(0,1)	$ \Phi^-\rangle_{AF}, \Phi^-\rangle_{BE}$

表 4.4: 量子中継器ネットワークコーディングにより発生する Z エラーのパターン

に均一化し, 一つの Fidelity 変数 F にて表す.

$F = F_{AB} = F_{CD} = F_{EF} = F_{GH} = F_{IJ} = F_{KL} = F_{MN}$ とすると.

$$\begin{aligned}
 Prob(case0) = & 1F^7 + 0F^6(1-F) + 5F^5(1-F)^2 + 12F^4(1-F)^3 \\
 & + 7F^3(1-F)^4 + 4F^2(1-F)^5 + 3F(1-F)^6 + 0(1-F)^7 \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Prob(case1) = & 0F^7 + 2F^6(1-F) + 6F^5(1-F)^2 + 8F^4(1-F)^3 \\
 & + 8F^3(1-F)^4 + 6F^2(1-F)^5 + 2F(1-F)^6 + 0(1-F)^7 \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Prob(case2) = & 0F^7 + 2F^6(1-F) + 6F^5(1-F)^2 + 8F^4(1-F)^3 \\
 & + 8F^3(1-F)^4 + 6F^2(1-F)^5 + 2F(1-F)^6 + 0(1-F)^7 \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Prob(case3) = & 0F^7 + 3F^6(1-F) + 4F^5(1-F)^2 + 7F^4(1-F)^3 \\
 & + 12F^3(1-F)^4 + 5F^2(1-F)^5 + 0F(1-F)^6 + 1(1-F)^7 \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

また, 式 4.56 に $F = 0.90$ を代入したとき, それぞれの状態が出現する確率は以下の式で与えられる.

$$\begin{aligned}
 Prob(case0) & \doteq 0.508 \\
 Prob(case1) & \doteq 0.142 \\
 Prob(case2) & \doteq 0.142 \\
 Prob(case3) & \doteq 0.195 \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

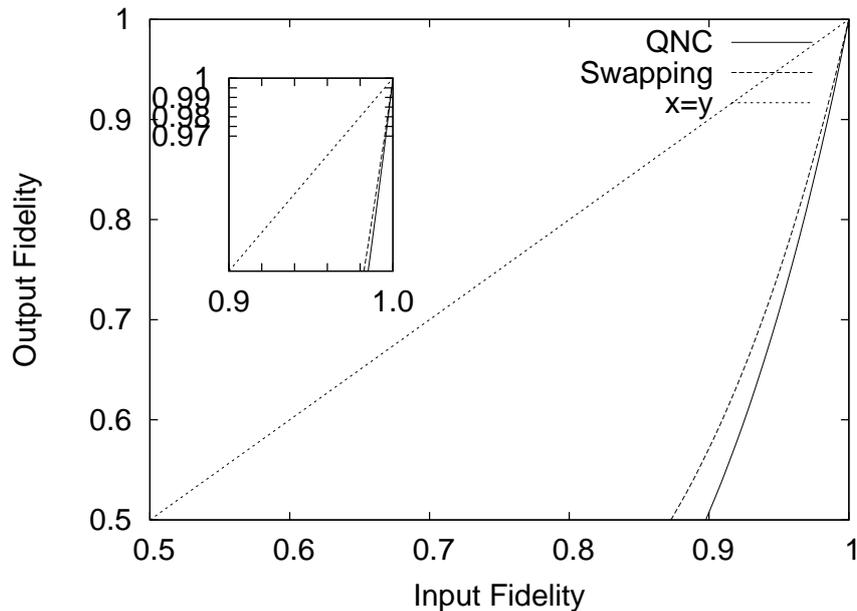


図 4.9: Swapping, QNC それぞれの Fidelity の比較 .

※前から順に、AB, CD, EF, GH, IJ, KL, MN間のエラー有無を示す

黒: エラーなし 赤: AF間にエラー 青: EB間にエラー 緑: 両方にエラー

000000	001000	010000	011000	100000	101000	110000	111000
000001	001001	010001	011001	100001	101001	110001	111001
000010	001010	010010	011010	100010	101010	110010	111010
000011	001011	010011	011011	100011	101011	110011	111011
000100	0010100	0100100	0110100	1000100	1010100	1100100	1110100
000101	0010101	0100101	0110101	1000101	1010101	1100101	1110101
000110	0010110	0100110	0110110	1000110	1010110	1100110	1110110
000111	0010111	0100111	0110111	1000111	1010111	1100111	1110111
001000	0011000	0101000	0111000	1001000	1011000	1101000	1111000
001001	0011001	0101001	0111001	1001001	1011001	1101001	1111001
001010	0011010	0101010	0111010	1001010	1011010	1101010	1111010
001011	0011011	0101011	0111011	1001011	1011011	1101011	1111011
001100	0011100	0101100	0111100	1001100	1011100	1101100	1111100
001101	0011101	0101101	0111101	1001101	1011101	1101101	1111101
001110	0011110	0101110	0111110	1001110	1011110	1101110	1111110
001111	0011111	0101111	0111111	1001111	1011111	1101111	1111111

図 4.10: Z-error 発生パターン早見表

となる．よって AF または BE のどちらかのみエラーの発生する確率は約 0.59 となる．
2 つの確率変数の間の相関を示す指標として，相関係数がある．相関係数は図 4.6 から
式 4.60 で求めることができる．

	Φ_{BE}^+	Φ_{BE}^-	
Φ_{AF}^+	a 0.508	b 0.142	e 0.650
Φ_{AF}^-	c 0.142	d 0.195	f 0.337
	g 0.650	h 0.337	

表 4.6: Φ_{AF} と Φ_{BE} の相関係数

$$\phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{efgh}} = 0.360 \quad (4.60)$$

第5章 QNCにおけるX-errorの理論的解析

本章では、初期資源にXエラーが含まれている場合における理論的解析を行う。

前章に続いて図4のように複数の量子中継器・Bell-pair からなるバタフライ型のネットワークを想定する。

5.1 エラーモデルの定義

図4の初期配置における各Bell-pairがノード間で共有される際に確率 p でXエラーが発生する場合、各Bell-pairの状態は式5.1で表される。ここで $F = 1 - p$ とする。 $p = \alpha$ で σ_x が起きる。本章におけるエラーモデルはZエラーを含まない。また、CNOTや測定をはじめとしたローカルオペレーションは成功確率1でエラーも発生しないものとする。

$$\rho = F|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + (1 - F)|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| \tag{5.1}$$

また、本章で扱うXエラーについて、Xエラーは図5.1のように伝播することに留意する。

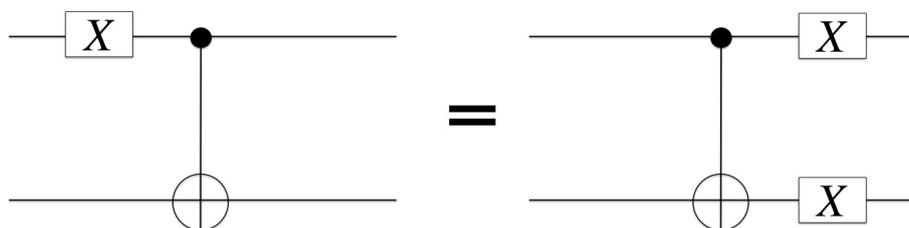


図5.1: Xエラーの伝播。左図と右図は同じ操作を意味する。

5.2 Connection

Connection に用いる二つの Bell-pair , AB と CD にはそれぞれ任意の確率で X エラーがかかっており , 演算子 $\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を用いて以下の式でそれぞれの Connection 操作前の初期状態を表現できる .

$$|\psi_{AB}\rangle = \hat{X}_A^{S_{AB}}(|00\rangle + |11\rangle)_{AB} \quad (5.2)$$

$$|\psi_{CD}\rangle = \hat{X}_D^{S_{CD}}(|00\rangle + |11\rangle)_{CD} \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

Connection 操作終了後には ,

$$|\psi_{ABD}\rangle = \hat{X}_A^{S_{AB}} \hat{X}_D^{S_{CD}}(|000\rangle + |111\rangle)_{ABD}. \quad (5.5)$$

となる .

Connection 操作開始時と終了時におけるエラーの状態を表 5.1 で表す .

case#	(S_{CD}, S_{AB})	$ \psi_i\rangle_{Init}$	Resulting (S_{CD}, S_{AB})
0	0,0	$ \psi_0\rangle$	0,0
1	0,1	$ \psi_1\rangle = \sigma_Z^A \psi_0\rangle$	0,1
2	1,0	$ \psi_2\rangle = \sigma_Z^D \psi_0\rangle$	1,0
3	1,1	$ \psi_3\rangle = \sigma_Z^A \sigma_Z^D \psi_0\rangle$	1,1

表 5.1: Connection 操作における X エラーの発生パターンとその状態表記

Bell 基底において , 非対角成分は全て 0 の場合以下の式で表記可能である .

$$\begin{aligned} \rho_{AB} \otimes \rho_{CD} = & F_{AB} F_{CD} (|\Phi^+\rangle|\Phi^+\rangle)(\langle\Phi^+|\langle\Phi^+|) \\ & + F_{AB}(1 - F_{CD})(|\Phi^+\rangle|\Psi^+\rangle)(\langle\Psi^+|\langle\Phi^+|) \\ & + (1 - F_{AB})F_{CD}(|\Psi^+\rangle|\Phi^+\rangle)(\langle\Phi^+|\langle\Psi^+|) \\ & + (1 - F_{AB})(1 - F_{CD})(|\Psi^+\rangle|\Psi^+\rangle)(\langle\Psi^+|\langle\Psi^+|) \end{aligned} \quad (5.6)$$

前章と同様に計算を行い , Connection 操作終了時点での各 case の状態は以下の式で表される .

$$\text{Case 0: } |\psi_0\rangle = (|000\rangle + |111\rangle)_{ABD}$$

$$\text{Case 1: } |\psi_1\rangle = (|100\rangle + |011\rangle)_{ABD}$$

Case 2: $|\psi_2\rangle = (|001\rangle + |110\rangle)_{ABD}$

Case 3: $|\psi_3\rangle = (|101\rangle + |010\rangle)_{ABD}$

以上をまとめて $\rho_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ を用いて,

$$\rho = F_{AB}F_{CD}\rho_0 + (1 - F_{AB})F_{CD}\rho_1 + F_{AB}(1 - F_{CD})\rho_2 + (1 - F_{AB})(1 - F_{CD})\rho_4 \quad (5.7)$$

となる.

ここでの Connection 操作において, $F_{AB} = F_{CD}$ とすると操作前の Fidelity を Y 軸に操作後の Fidelity を X 軸にとると図 5.2 となる.

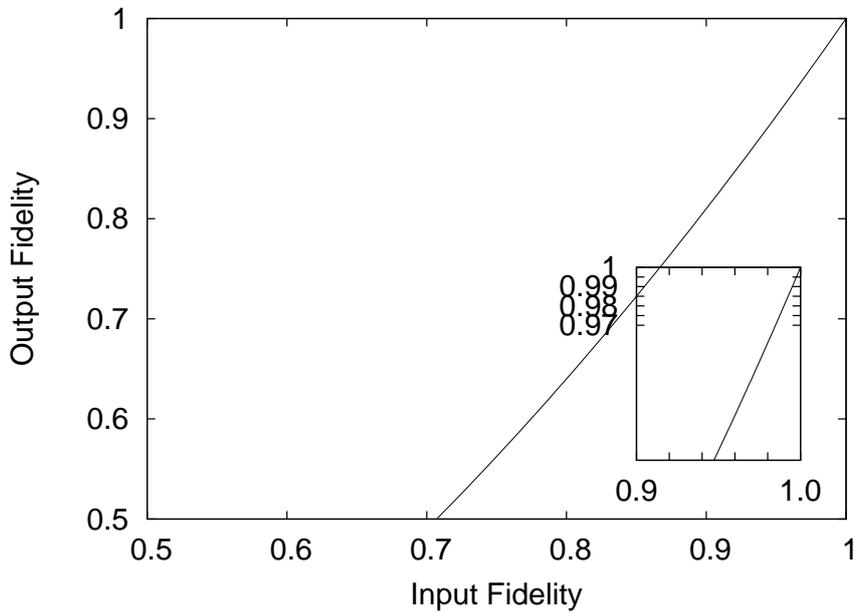


図 5.2: Connection 操作の Fidelity

また, 量子ビット EFGH 間における Connection 操作においても同様である.

5.3 Result

Connection 操作以降の Add, Fanout, Removal, RemovalAdd の各操作においても前章と同様に計算を行った. 本節ではその結果を記す.

$$|\psi_{AF}\rangle = \hat{X}_F^{S_0}(|00\rangle + |11\rangle)_{AF} \quad (5.8)$$

$$|\psi_{BE}\rangle = \hat{X}_E^{S_1}(|00\rangle + |11\rangle)_{BE} \quad (5.9)$$

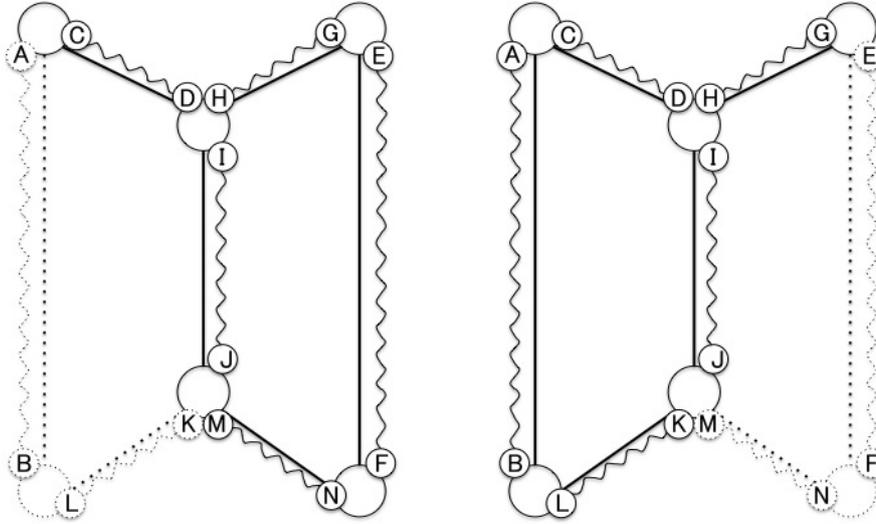


図 5.3: 最終的に作成される Bell-pair に X エラーが乗る初期配置の組合せ

量子ネットワークコーディングの実行によって生み出される二つの Bell-pair $|\Phi^+\rangle_{AF}, |\Phi^+\rangle_{BE}$ にかかる X エラーのパターンは上の式の S_0, S_1 によって分類可能であり, それを表 5.2 に示す.

case#	(S_1, S_0)	$ \psi_{AF}\rangle, \psi_{BE}\rangle$
0	(0,0)	$ \Phi^+\rangle_{AF}, \Phi^+\rangle_{BE}$
1	(0,1)	$ \Psi^+\rangle_{AF}, \Phi^+\rangle_{BE}$
2	(1,0)	$ \Phi^+\rangle_{AF}, \Psi^+\rangle_{BE}$
3	(1,1)	$ \Psi^+\rangle_{AF}, \Psi^+\rangle_{BE}$

表 5.2: 量子中継器ネットワークコーディングにより発生する X エラーのパターン

この時, S_0 および S_1 は式 5.10 で表される特定の Bell-pair のエラーの数により値が定まる. また, 表中の Bell-pair の組合せを図 5.3 で表現する.

$$S_0 = CD + EF + GH + IJ + MN \pmod{2} \quad (5.10)$$

$$S_1 = AB + CD + GH + IJ + KL \pmod{2} \quad (5.11)$$

この図 5.3 において, 実線部上の Bell-pair に発生する X-error が. 左の図は AF 間に, 右の図は BE 間へとそれぞれ影響することを表す.

それぞれの Case の発生確率 $Prob_i$ は表記の簡略化のために均一化し, 一つの Fidelity 変数 F にて表す.

$F = F_{AB} = F_{CD} = F_{EF} = F_{GH} = F_{IJ} = F_{KL} = F_{MN}$ とすると .

$$\begin{aligned} Prob(case0) = & 1F^7 + 0F^6(1-F) + 5F^5(1-F)^2 + 12F^4(1-F)^3 \\ & + 7F^3(1-F)^4 + 4F^2(1-F)^5 + 3F(1-F)^6 + 0(1-F)^7 \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} Prob(case1) = & 0F^7 + 2F^6(1-F) + 6F^5(1-F)^2 + 8F^4(1-F)^3 \\ & + 8F^3(1-F)^4 + 6F^2(1-F)^5 + 2F(1-F)^6 + 0(1-F)^7 \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} Prob(case2) = & 0F^7 + 2F^6(1-F) + 6F^5(1-F)^2 + 8F^4(1-F)^3 \\ & + 8F^3(1-F)^4 + 6F^2(1-F)^5 + 2F(1-F)^6 + 0(1-F)^7 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} Prob(case3) = & 0F^7 + 3F^6(1-F) + 4F^5(1-F)^2 + 7F^4(1-F)^3 \\ & + 12F^3(1-F)^4 + 5F^2(1-F)^5 + 0F(1-F)^6 + 1(1-F)^7 \end{aligned} \quad (5.15)$$

この式は式 4.56 と同等であり , つまり $F = F_{AB} = F_{CD} = F_{EF} = F_{GH} = F_{IJ} = F_{KL} = F_{MN}$ の際に , 量子ネットワークコーディングのエラー発生確率は X-error と Z-error 共に同一であることが分かる .

また , 式 4.56 に $F = 0.90$ を代入したとき , それぞれの状態が出現する確率は以下の式で与えられる .

$$\begin{aligned} Prob(case0) & \doteq 0.508 \\ Prob(case1) & \doteq 0.142 \\ Prob(case2) & \doteq 0.142 \\ Prob(case3) & \doteq 0.195 \end{aligned} \quad (5.16)$$

また , $F = 0.98$ の場合は

$$\begin{aligned} Prob(case0) & \doteq 0.870 \\ Prob(case1) & \doteq 0.038 \\ Prob(case2) & \doteq 0.038 \\ Prob(case3) & \doteq 0.055 \end{aligned} \quad (5.17)$$

となる .

また , 7 種の Bell-pair のうちエラーを持っている 2 種類の組合せにより最終的なエラーの乗り方が分かる . その様子を Z-error と同様に表 5.3 にまとめる . なお , 表中の数字はそれぞれ対応する case#(図 ??) を表す .

第6章 結論

6.1 成果

本論文によって解明した点を以下に挙げる．

- Z-error または X-error 発生時の量子ネットワークコーディング成功確率
- それぞれの初期資源が完成した Bell-pair にどのような影響をもたらすか
- 量子ネットワークコーディングとエンタングルメントスワッピングの単純比較
- 量子ネットワークコーディングの使用可能な Fidelity の目安

量子ネットワークコーディングにおける Z-error および X-error の伝播について1ステップごとに明らかにした．また，初期資源である全ての Bell-pair の Fidelity が等しい時，全体の成功確率を導く式は Z-error と X-error で等しいことが分かった．

量子ネットワークコーディングで最終的に作成される Bell-pair が，初期資源のどの Bell-pair の状態異常をそれぞれ受け継ぐのかを明らかにした．

同時通信を達成するための手段として，本論文では量子ネットワークコーディングを用いるものとエンタングルメントスワッピングを用いるものを挙げたが，量子ネットワークコーディングによって2組の Bell-pair を得るための Fidelity はエンタングルメントスワッピングによる経路選択手法と比べてわずかに小さくなることが明らかになった．この成果は量子ネットワークコーディングを選択すべきか否かの目安となる．例えば，量子ネットワークコーディングはプロトコルを1回実行するだけで2組の Bell-pair を得られることからバタフライネットワーク上において2回の実行が必要なスワッピングによる解決法と比較すると，スループットによる影響を深く懸念している際に有用であることが分かった．

また，量子中継器ネットワークコーディングが実用的に使用可能となる初期状態の Fidelity の下限の目安 $F = 0.90$ を初めて求めた．

6.2 課題と展望

前節で述べた成果により，これまで未知であった実用的な環境下での量子ネットワークコーディングの有用性が一部明らかになった．しかし本研究の成果のみでは量子ネットワークコーディングを用いるための指標としては不十分である．特に純度精製や量子操作の成功確率等に関して議論が及んでいないため，これらの解明および指標の改善を今後の課題としたい．

謝辞

本論文の作成にあたり、ご指導頂いた慶應義塾大学環境情報学部教授村井純博士、同学部教授徳田英幸博士、同学部教授中村修博士、同学部教授武田圭史博士、同学部准教授楠本博之博士、同学部准教授高汐一紀博士、同学部准教授三次仁博士、同学部准教授植原啓介博士、同学部専任講師中澤仁博士に感謝致します。

Rodney D. Van Meter III 博士に重ねて感謝致します。博士には私が研究室に入室した当初より御指導御助言を頂きました。

慶應義塾大学政策・メディア研究科後期博士課程永山翔太氏、同学部特任講師鈴木茂哉氏に感謝致します。

東京大学佐藤貴彦氏に感謝致します。氏には、本研究のベースとなる先行研究について一から教えて頂きました。

また、執筆を共にしました研究会の皆様にも感謝致します。

以上をもって謝辞と致します。

参考文献

- [1] Richard Feynman. Simulating physics with computers. *SIAM Journal on Computing*, 26:1484–1509, 1982.
- [2] Richard Feynman. Quantum mechanical computers. *Optics News*, 11(2):11–20, Feb 1985.
- [3] David Deutsch. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *The royal society A*, 400:97–117, 1985.
- [4] Gordon E. Moore. Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, 38(8), 1965.
- [5] Peter W. Shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 35:124–134, 1994.
- [6] C. H. Bennett and G. Brassard. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. pages 175–179. IEEE, December 1984.
- [7] Anne Broadbent, Joseph Fitzsimons, and Elham Kashefi. Universal blind quantum computation. In *Foundations of Computer Science, 2009. FOCS'09. 50th Annual IEEE Symposium on*, pages 517–526. IEEE, 2009.
- [8] Raymond W. Yeung, Shuo-Yen Robert Li, Ning Cai, and Zhen Zhang. Network coding theory: single sources. *Commun. Inf. Theory*, 2:241–329, September 2005.
- [9] Raymond W. Yeung. *Information Theory and Network Coding*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1 edition, 2008.
- [10] Masahito Hayashi, Kazuo Iwama, Harumichi Nishimura, Rudy Raymond, and Shigeru Yamashita. Quantum network coding. In *Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 610–621, 2007.

- [11] Debbie Leung, Jonathan Oppenheim, and Andreas Winter. Quantum network communication: the butterfly and beyond. *IEEE Transactions on Information Theory*, 56:3478–3490, July 2010.
- [12] Masahito Hayashi. Prior entanglement between senders enables perfect quantum network coding with modification. *Phys. Rev. A*, 76:040301, Oct 2007.
- [13] Yaoyun Shi and Emina Soljanin. On multicast in quantum networks. In *40th Annual Conference on Information Sciences and Systems*, pages 871–876, 2006.
- [14] Daniel M. Greenberger, Michael A. Horne, and Anton Zeilinger. Going beyond bell’s theorem. *Bell’s Theorem, Theory and Conceptions of the Universe*, pages 69–72, 1989.
- [15] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 1 edition, January 2000.
- [16] Nicolas Gisin and Rob Thew. Quantum communication. *Nature Photonics*, 1:165–171, March 2007.
- [17] Hoi-Kwong Lo and Yi Zhao. Quantum cryptography. In *Encyclopedia of Complexity and System Science*. Springer, 2008. arXiv:0803.2507v4 [quant-ph].
- [18] A.K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell’s theorem. *Physical Review Letters*, 67(6):661–663, 1991.
- [19] Chip Elliott, David Pearson, and Gregory Troxel. Quantum cryptography in practice. In *Proc. SIGCOMM 2003* [20].
- [20] ACM. *Proc. SIGCOMM 2003*. ACM, August 2003.
- [21] W. Dür, H.-J. Briegel, J. I. Cirac, and P. Zoller. Quantum repeaters based on entanglement purification. 59(1):169–181, Jan 1999.
- [22] Rodney Van Meter and Joe Touch. Designing quantum repeater networks. *IEEE Communications*, pages 64–71, August 2013.
- [23] Rodney Van Meter, Takahiko Satoh, Thaddeus D. Ladd, William J. Munro, and Kae Nemoto. Path selection for quantum repeater networks. *Networking Science*, pages 1–14, 2013.

- [24] M. Żukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne, and A. K. Ekert. “event-ready-detectors” bell experiment via entanglement swapping. *Phys. Rev. Lett.*, 71:4287–4290, Dec 1993.
- [25] S. Bose, V. Vedral, and P. L. Knight. Multiparticle generalization of entanglement swapping. *Phys. Rev. A*, 57:822–829, Feb 1998.
- [26] Rudolf Ahlswede, Ning Cai, Shuoyen Robert Li, and Raymond W. Yeung. Network information flow. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(4):1204–1216, 2000.
- [27] Chihchun Wang. Beyond the butterfly - a graphtheoretic characterization of the feasibility of network coding with two simple unicast sessions. In *2007 IEEE International Symposium on Information Theory*, pages 121–125, 2007.
- [28] Takahiko Satoh, François Le Gall, and Hiroshi Imai. Quantum network coding for quantum repeaters. *Phys. Rev. A*, 86:032331, 2012.

付録A 付録

付録として、FIRST 全体会議 2012 で発表したポスターを載せる。



WIDE

量子中継器を用いた量子ネットワークコーディングの挙動解析

Keio University, The University of Tokyo, NTT Basic Research Laboratories
kaori@sf.wide.ad.jp, rdv@sf.wide.ad.jp, sato@is.s.u-tokyo.ac.jp

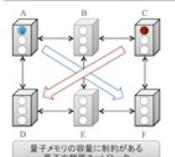


FIRST project

Motivation

同時保持可能な量子ビットの数に制約を持つ量子中継器と、ノイズを持った量子通信路により構成される複雑なネットワーク上での輻輳する量子通信処理に対する最良手法を求めたい。

Main Problem



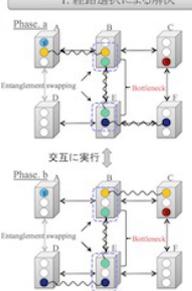
左図の6量子中継器からなる格子状ネットワークにおいて、中継器A-F間とC-D間で量子通信を行いたい。中継器の持つ量子メモリに制約を想定する。目的の量子通信の実現に必要な「時間資源」に着目した効率的な通信処理手法とは何か？

- Noisy quantum channel
- Quantum repeater
 - 量子状態の生成・保持・局所操作が可能
 - 可能な増幅デバイス
- Quantum information

量子メモリの容量に制約がある量子中継器ネットワーク

輻輳する量子通信問題へのアプローチ

1. 経路選択による解決



通信プロトコル

Phase a. 中継器A-F間での量子通信

- Step 1. 中継器A-F間でEPR-pairを準備する
- Step 2. 中継器BとCでEntanglement swappingを実行する
 - Step 1-2を繰り返して、A-F間に高FidelityなEntangled pairを複数準備する
- Step 3. 中継器A-F間でPurificationを行うことにより、量子通信可能な状態のEPR-pairが生成される
- Step 4. 量子通信の実行

Phase b. 中継器C-D間での量子通信

- Step 1. 中継器C-D間でEPR-pairを準備する
- Step 2. 中継器BとCでEntanglement swappingを実行する
 - Step 1-2を繰り返して、C-D間に高FidelityなEntangled pairを複数準備する
- Step 3. 中継器C-D間でPurificationを行うことにより、量子通信可能な状態のEPR-pairが生成される
- Step 4. 量子通信の実行

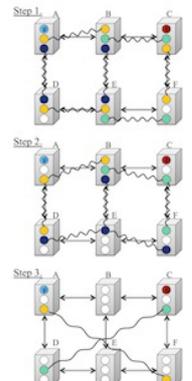
メリット

- 通信プロトコルが単純である
- 複雑な量子状態が出現しないため、Fidelity管理が容易である

デメリット

- ネットワークの構成によってはボトルネックが発生してしまう
- Phase切替に伴う同期処理などによる通信遅延

2. 量子ネットワークコーディングによる解決



通信プロトコル (Purificationを考慮しない)

- Step 1. 隣接中継器間にEPR-pairを準備する
- Step 2. 中継器B-C間、B-D間、B-E間でそれぞれGHZ状態を共有する
- Step 3. 中継器A-F間でEPR-pairが同時共有される
- Step 4. 2つの量子通信の実行

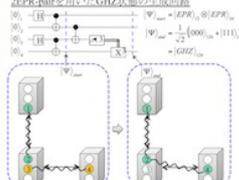
メリット

- 複数の量子通信の同時処理が可能
- 各中継器は任意のタイミングでプロトコルを処理可能
- 経路選択手法には不可能なボトルネックを解消できる構成のネットワークが存在する (ex. Butterfly network, grid network)

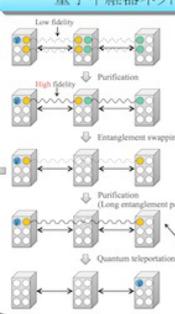
デメリット

- プロトコル実行中の量子状態が複雑になる
- ノイズの影響緩和や多体間entanglementに対するPurificationなど、未解決問題が多い

2EPR-pairを用いたGHZ状態の生成回路



量子中継器ネットワーク[1]



- 複数の量子中継器と量子チャネルから構成されるネットワーク
- 量子中継器は、Purification+Entanglement Swappingを用いて量子通信を行う中継器間にEPR-pairを生成する
- Fidelityが低い状態のEPR-pairを複数準備する
- 量子テレポーテーションにより、量子通信を実行する

Purification

- 2対の低FidelityなEntangled pairから1対の高FidelityなEntangled pairを生成する操作を目指す

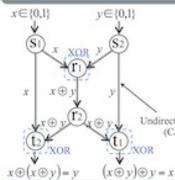
Entanglement swapping

- 2対のEPR-pairを接続し、1対の長いEntangled pairを生成する操作を目指す。この操作によって異なる量子状態のFidelityは、元の量子状態のFidelityよりも低下する。

量子通信可能な状態

- 送信側中継器と受信側中継器の間に接続EPR-pairが共有され、量子テレポーテーションによる量子通信が可能になる状態を目指す

古典ネットワークコーディング[2]



$x \in \{0,1\}$, $y \in \{0,1\}$

Butterfly networkの場合

- 左図の右向きネットワークにおいて、ノードs+1間とs+2間は同時にビット複製、yを通信したい
- 経路選択手法では、同時に不可能である
- ネットワークコーディングでは、中継ノードにおいてXOR演算を行うことで目的を達成する

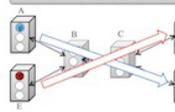
Undirected classical channel (Capacity = 1bit)

- スループットの他にもセキュリティやロバスト性、通信経路探索に重要な要素で輻輳処理手法に対する有効性を持つ
- 近年、無線ネットワークを中心に注目されている。

$x \otimes (x \oplus y) = y$, $(x \otimes y) \oplus y = x$

既存研究

ボトルネックを持つ量子中継器ネットワーク[3]



- 量子メモリの容量に制約がある複数の量子中継器とノイズを持った量子チャネルから構成される量子中継器ネットワークにおける量子通信の輻輳問題に対するプロトコルの提案
- ボトルネックとなる量子チャネルを介した量子通信 (A-F, E-D) が同時に実現される際に実行される量子中継器のリソース配分、通信切り替えに関する物理的解析を行っている。

[Aparicio, Van Meter, Esaki 2011]

量子中継器ネットワークコーディング[4]



- 量子中継器プロトコル上で実行可能なネットワークコーディング、複数の量子通信可能な状態を同時に作り出す。

[Sato, Le Gall, Imai 2012]

解析手法

- [Aparicio, Van Meter, Esaki 2011] で用いた、量子中継器ネットワークシミュレータ "Saprophy" を拡張する
- ネットワークコーディングの実行過程で出現する多体間entanglementに対するPurificationの有効性を調べる
 - ✓ Deterministicに実行可能かどうか？
 - ✓ どのタイミングでPurificationを行うことができるのか？
- 量子通信から実行時間を基準として、量子中継器ネットワークにおけるネットワークコーディングの有効性に結論を出すことを目指す。

参考文献

- [1] H.-J. Briegel, W. Dür, J. I. Cirac, and P. Zoller, Quantum Repeaters: The Role of Imperfect Local Operations in Quantum Communication, *Physical Review Letters*, volume 81, pages 5932-5935, 1998.
- [2] R. Ahlswede, N. Cai, S.-Y. Ri Li, and R. W. Yeung, Network Information Flow, *IEEE Transactions on Information Theory*, volume 45, number 4, pages 1204-1216, 2000.
- [3] Luciano Aparicio, Rodney Van Meter and Hiroshi Esaki, Protocol design for quantum repeater networks, *Proceedings of the 7th Asian Internet Engineering Conference*, pages 73-80, 2011.
- [4] Takahiko Sato, François Le Gall and Hiroshi Imai, Quantum network coding for quantum repeaters, *Physical Review A*, 86, 032331, 2012.

図 A.1: FIRST 全体会議 2012 で発表したポスター